



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



Escola Politécnica Superior

Trabajo Fin de Máster
CURSO 2018/19

Flujo de cargas en sistemas de energía eléctrica

Máster en Ingeniería Industrial

ALUMNO

Bruno Sancho-Cirer Poczatek

TUTOR

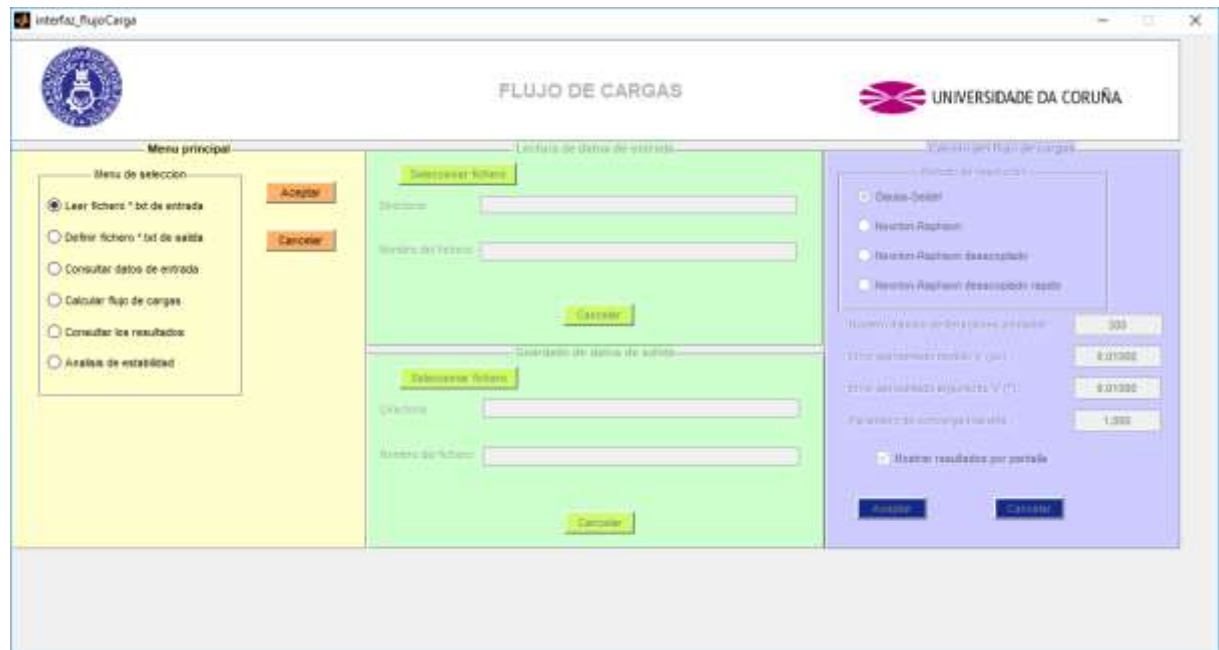
Santiago Vázquez Rodríguez

FECHA

Febrero 2019

El presente Trabajo Final de Máster viene motivado por mi interés en los sistemas eléctricos, y en el análisis de programas informáticos. Debido a ello, el presente trabajo desarrollará un programa informático en Matlab que permita el análisis y estudio de diferentes sistemas eléctricos:

- Lectura de datos de un sistema eléctrico.
- Parametrización del análisis de sistemas eléctricos.
- Cálculo de flujo de cargas de sistemas eléctricos.
- Visualización y guardado de resultados.
- Análisis básico de estabilidad de tensión.



El trabajo se dividirá en cuatro secciones. Inicialmente se definen y describen los elementos de un sistema eléctrico, de gran interés para comprender el tratamiento de los ficheros a integrar por el programa. A continuación, se describe el problema del flujo de cargas o flujo de potencias, que permite determinar el estado de operación normal de un sistema eléctrico. Más adelante, se trata el flujo de cargas continuado, que permite perturbar las condiciones normales de operación de un sistema eléctrico. De esta manera, se pueden simular infinidad de escenarios de carga, llegando incluso a puntos de operación cercanos al crítico. Finalmente se aplican los métodos discretos a sistemas de 5, 14 y 30 nudos, extrayendo las pertinentes conclusiones.



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



Escola Politécnica Superior

**TRABAJO FIN DE MÁSTER
CURSO 2018/19**

Flujo de cargas en sistemas de energía eléctrica

Máster en Ingeniería Industrial

Documento

MEMORIA

1 ÍNDICE

1.1 Figuras

Figura 1. Programa de estudio de sistemas de energía eléctricos	9
Figura 2. Diagrama del sistema eléctrico español (EOI, 2015).....	10
Figura 3. Diagrama unifilar simplificado de una red eléctrica.....	11
Figura 4. Ejemplo de nudo generador o nudo PV (nudo “nud1” en la imagen) y nudo receptor o nudo PQ (nudo “nud2” en la imagen).....	12
Figura 5. Esquema de un nudo PV.	13
Figura 6. Convenio de signos de potencias para un nudo PV.	13
Figura 7. Esquema de un nudo balance.....	14
Figura 8. Convenio de signos para un nudo balance.....	14
Figura 9. Esquema de un nudo PQ.	14
Figura 10. Convenio de signos para un nudo PQ.	15
Figura 11. Representación de una línea eléctrica mediante un cuadripolo.	16
Figura 12. Modelo eléctrico de una rama “ram” que conecta los nudos “nud1” y “nud2”	17
Figura 13. Aplicación de la primera ley de Kirchhoff.....	19
Figura 14. Red eléctrica con sus admitancias. Criterio de signos para corrientes eléctricas.....	20
Figura 15. Flujo de corrientes en un nudo eléctrico.	20
Figura 16. Esquema eléctrico de un transformador	24
Figura 17. Esquema eléctrico simplificado de un transformador (pu)	24
Figura 18. Incorporación de la regulación de la relación de transformación (factor α)	24
Figura 19. Flujo de potencia para un nudo PV.	26
Figura 20. Flujo de potencia para un nudo PQ.	26
Figura 21. Esquema de una línea eléctrica.	43
Figura 22. Esquema de un sistema generador – línea – carga.	45
Figura 23. Curvas PV para el sistema de la figura 22 ($R=0.05pu$; $X=0.2pu$; $V1=1pu$)	47
Figura 24. Ilustración de punto de máxima carga y límites de estabilidad.	48
Figura 25. Gráfica de la función de estudio	49
Figura 26 . Método de continuación para una ecuación	56
Figura 27. Detalle del método de continuación para una ecuación.....	57
Figura 28. Diagrama de flujo para el proceso de predicción-corrección.	67
Figura 29. Sistema de 5 nudos eléctricos.....	69
Figura 30. Curva de 5 nudos para el sistema de 5 nudos.	70
Figura 31. Curva de carga para el sistema eléctrico de 5 nudos	80
Figura 32. Curva de carga para el sistema eléctrico de 5 nudos	81
Figura 33. Nudos eléctricos del sistema de 14 nudos	82

Figura 34. Líneas eléctricas del sistema de 14 nudos	82
Figura 35. Flujo de carga continuado para el nudo 4 del sistema de 14 nudos	83
Figura 36. Flujo de carga continuado para el nudo 5 del sistema de 14 nudos	83
Figura 37. Flujo de carga continuado para el nudo 7 del sistema de 14 nudos	84
Figura 38. Flujo de carga continuado para el nudo 9 del sistema de 14 nudos	84
Figura 39. Flujo de carga continuado para el nudo 10 del sistema de 14 nudos	85
Figura 40. Flujo de carga continuado para el nudo 11 del sistema de 14 nudos	85
Figura 41. Flujo de carga continuado para el nudo 12 del sistema de 14 nudos	86
Figura 42. Flujo de carga continuado para el nudo 13 del sistema de 14 nudos	86
Figura 43. Flujo de carga continuado para el nudo 14 del sistema de 14 nudos	87
Figura 44. Nudos eléctricos del sistema de 30 nudos	88
Figura 45. Nudos eléctricos del sistema de 30 nudos	88
Figura 46. Flujo de carga continuado para el nudo 3 del sistema de 30 nudos	89
Figura 47. Flujo de carga continuado para el nudo 4 del sistema de 30 nudos	89
Figura 48. Flujo de carga continuado para el nudo 6 del sistema de 30 nudos	90
Figura 49. Flujo de carga continuado para el nudo 7 del sistema de 30 nudos	90
Figura 50. Flujo de carga continuado para el nudo 9 del sistema de 30 nudos	91
Figura 51. Flujo de carga continuado para el nudo 10 del sistema de 30 nudos	91
Figura 52. Flujo de carga continuado para el nudo 12 del sistema de 30 nudos	92
Figura 53. Flujo de carga continuado para el nudo 14 del sistema de 30 nudos	92
Figura 54. Flujo de carga continuado para el nudo 15 del sistema de 30 nudos	93
Figura 55. Flujo de carga continuado para el nudo 16 del sistema de 30 nudos	93
Figura 56. Flujo de carga continuado para el nudo 17 del sistema de 30 nudos	94
Figura 57. Flujo de carga continuado para el nudo 18 del sistema de 30 nudos	94
Figura 58. Flujo de carga continuado para el nudo 19 del sistema de 30 nudos	95
Figura 59. Flujo de carga continuado para el nudo 20 del sistema de 30 nudos	95
Figura 60. Flujo de carga continuado para el nudo 21 del sistema de 30 nudos	96
Figura 61. Flujo de carga continuado para el nudo 22 del sistema de 30 nudos	96
Figura 62. Flujo de carga continuado para el nudo 23 del sistema de 30 nudos	97
Figura 63. Flujo de carga continuado para el nudo 24 del sistema de 30 nudos	97
Figura 64. Flujo de carga continuado para el nudo 25 del sistema de 30 nudos	98
Figura 65. Flujo de carga continuado para el nudo 26 del sistema de 30 nudos	98
Figura 66. Flujo de carga continuado para el nudo 27 del sistema de 30 nudos	99
Figura 67. Flujo de carga continuado para el nudo 28 del sistema de 30 nudos	99
Figura 68. Flujo de carga continuado para el nudo 29 del sistema de 30 nudos	100
Figura 69. Flujo de carga continuado para el nudo 30 del sistema de 30 nudos	100

1.2 Tablas

Tabla 1. Constantes generalizadas del cuadripolo eléctrico modelo Pi	18
Tabla 2. Ejemplos de acoplamiento magnético	23
Tabla 3. Características de los nudos eléctricos	33
Tabla 4. Proceso de predicción y corrección	52
Tabla 5. Resultados del método de continuación para una ecuación	56
Tabla 6. Estado eléctrico inicial para el sistema de 5 nudos.....	69
Tabla 7. Resultados para el sistema eléctrico de 5 nudos.....	80

1.3 Contenidos

1 Índice	4
1.1 Figuras.....	4
1.2 Tablas.....	6
1.3 Contenidos	7
2 Introducción	8
3 Elementos de un sistema eléctrico.....	10
3.1 Nudos eléctricos	11
3.2 Ramas eléctricas	16
3.3 Transformadores	24
4 Flujo de carga	26
4.1 Introducción	26
4.2 Método de Gauss-Seidel.....	29
4.3 Método de Newton-Raphson	33
4.4 Método de Newton Raphson desacoplado.....	39
4.5 Método de Newton-Raphson desacoplado rápido.....	41
4.6 Líneas.....	43
5 Flujo de carga continuado	45
5.1 Estabilidad de tensión	45
5.2 Proceso de predicción-corrección para una ecuación	49
5.3 Para sistemas de potencia.....	58
5.3.1 Parámetro de continuación	61
5.3.2 Predictor	62
5.3.3 Corrector.....	65
6 Resultados numéricos.....	69
6.1 Sistema de 5 nudos	69
6.1.1 Segundo punto de la curva	70
6.1.2 Cuarto punto de la curva.....	75
6.2 Sistema de 14 nudos	82
6.3 Sistema de 30 nudos	88
7 Conclusiones	101
8 Referencias.....	102

2 INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo Final de Máster viene motivado por dos de mis mayores intereses académicos; los sistemas eléctricos, y el análisis de programas informáticos.

El objetivo de una red eléctrica es suplir la demanda de energía eléctrica de los consumidores. Para ello se interconectan las centrales eléctricas con los puntos de consumo, mediante el uso de líneas eléctricas en configuración mallada. La producción de energía está limitada por el número de centrales existentes en la red, por su potencia instalada, y por restricciones como niveles de tensión admisibles, frecuencia de la red (50 Hz), o condiciones límite de operación de equipos eléctricos involucrados. Además, se debe satisfacer la demanda de energía de los consumidores (industriales, comerciales, residenciales, rurales, etc.) de forma continua y estable (que responda de forma inmediata a las fluctuaciones en la demanda, y que no haya interrupciones debido a operaciones de mantenimiento o reparación), bajo unos niveles mínimos de calidad (para mantener un sistema de potencia entre unos márgenes de tensión que eviten las sobretensiones o los colapsos de tensión); todo ello minimizando los costes de operación y mantenimiento. Todos estos factores complican la planificación y diseño de redes eléctricas; más aún cuando se observa el elevado número de elementos eléctricos presentes en la red y el carácter no lineal de las ecuaciones que describen su comportamiento (exigiendo el uso de métodos iterativos).

En este contexto, el flujo de cargas o flujo de potencias es un método que facilita el estudio de sistemas eléctricos, puesto que determina las tensiones, intensidades y potencias en distintos puntos de una red eléctrica. Para ello, se considerarán sistemas en estado estacionario, equilibrados, trifásicos, sinusoidales y sin anomalías. Como punto de partida se tomarán las condiciones de operación de la red eléctrica, definidas por las potencias de nudo en las cargas, y la potencia y tensión en los puntos de generación. Los resultados que se obtendrán serán básicamente el módulo y la fase de la tensión en cada nudo, así como las potencias activa y reactiva entrantes en cada nudo, sus flujos y las pérdidas.

El modelo matemático del problema de flujos está formado por un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Para obtener la solución de este sistema de ecuaciones, se utilizan métodos iterativos. Existen varios métodos que pueden ser aplicados, tales como: Gauss-Seidel, Newton-Raphson y una aproximación para mantener el Jacobiano constante, éste último conocido como Desacoplado Rápido.

La técnica del flujo de carga se puede ejecutar sucesivamente modificando ligeramente las condiciones de carga del sistema (variación de la demanda y de la generación), para determinar los perfiles de tensión del sistema en función de la carga del mismo, además de obtener información complementaria; como la tensión de colapso y el punto de carga máxima. Este procedimiento se conoce como flujo de carga continuado, y ha sido tratado bajo diferentes métodos (Ajjarapu, 2007; Chow et al, 2004; Gomez-Expósito et al., 2016; Grigsby, 2007; Milano, 2010). En el presente trabajo se adoptará el método predictor-corrector, realizando un análisis y modelado exhaustivo que muchas veces se omite en la bibliografía.

Por otra parte, el presente trabajo se condensará en un formato de programa informático. La finalidad de este programa es similar al de cualquier programa informático existente en el mercado; es decir, cumplir con una serie de especificaciones funcionales que permitan el tratamiento de datos. Para ello se ha elaborado una interfaz hombre-máquina como la ilustrada en la [Figura 1](#).

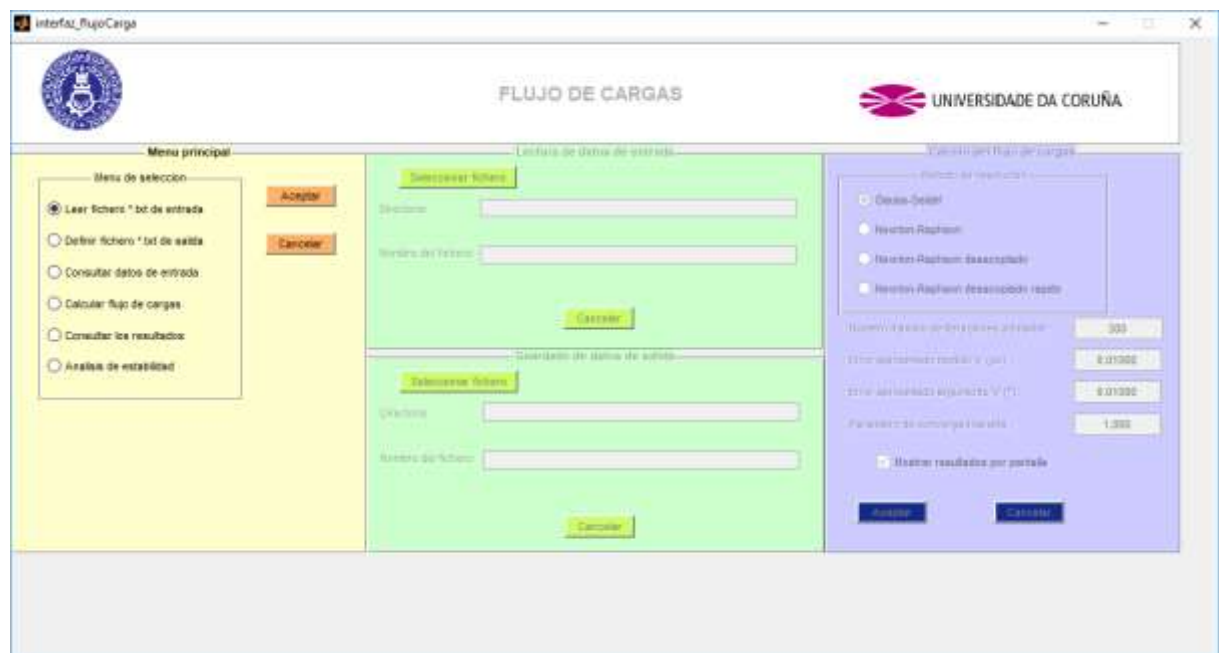


Figura 1. Programa de estudio de sistemas de energía eléctricos

Las finalidades del programa se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Lectura de datos de un sistema eléctrico.
- Parametrización del análisis de sistemas eléctricos.
- Cálculo de flujo de cargas de sistemas eléctricos.
- Visualización y guardado de resultados.
- Análisis básico de estabilidad de tensión.

El trabajo se dividirá en cuatro secciones. Inicialmente se definen y describen los elementos de un sistema eléctrico, de gran interés para comprender el tratamiento de los ficheros a integrar por el programa. A continuación, se describe el problema del flujo de cargas o flujo de potencias, que permite determinar el estado de operación normal de un sistema eléctrico. Más adelante, se trata el flujo de cargas continuado, que permite perturbar las condiciones normales de operación de un sistema eléctrico. De esta manera, se pueden simular infinidad de escenarios de carga, llegando incluso a puntos de operación cercanos al crítico. Finalmente se aplican los métodos discretos a sistemas de 5, 14 y 30 nudos, extrayendo las pertinentes conclusiones.

3 ELEMENTOS DE UN SISTEMA ELÉCTRICO

Una red eléctrica permite el transporte de energía eléctrica desde los puntos de generación hasta los puntos de consumo. La generación de electricidad se produce en centrales que normalmente están alejadas de los grandes puntos de consumo; debido a la ubicación de los recursos energéticos, y a factores económicos y socio-ambientales. Por esta razón, y debido a la imposibilidad de almacenar energía eléctrica en grandes cantidades, se han construido redes eléctricas que conectan los puntos de generación con los puntos de consumo; frecuentemente de forma mallada (para evitar problemas de suministro). Por lo tanto, tal como se puede apreciar en la [Figura 2](#), una red eléctrica está compuesta por centrales generadoras, transformadores, líneas de transporte y distribución, y consumidores.



Figura 2. Diagrama del sistema eléctrico español ([EOI, 2015](#)).

- Centrales eléctricas generadoras. La energía eléctrica se produce a partir del acoplamiento de generadores (generalmente síncronos y ocasionalmente asíncronos) a turbinas. Estas turbinas dependen del tipo de tipos de plantas productoras:
 - De vapor, ubicadas en **centrales termoeléctricas** que aprovechan la energía térmica liberada en la combustión del carbón, derivados del petróleo o gas natural (turbinas de gas); así como la energía térmica de la fisión del uranio (**centrales nucleares**).
 - **Hidráulicas o de bombeo**, que aprovechan la energía potencial de la masa de agua almacenada a una cota superior de la turbina (turbinas Pelton, Francis, Kaplan,...).
 - **No convencionales**. Se trata de turbinas eólicas o aerogeneradores (aprovechan la energía cinética del viento), turbinas submarinas (aprovechan la energía mareomotriz y de las corrientes marinas), o centrales solares (térmicas y fotovoltaicas).
- Puntos de consumo.
- Líneas de transporte y distribución. Las **redes de transporte** conectan las centrales eléctricas con los grandes puntos de consumo (poblaciones o grandes

industrias). Transportan la energía eléctrica a alta tensión; tensión superior o igual a 220 kV en Península y 66 kV en Canarias y Baleares. La empresa encargada del transporte de energía eléctrica es la REE.

Las **redes de distribución** son los intermediarios entre la red de transporte y los consumidores finales (hogares, complejos industriales, urbanos, y de servicios). Operan a media tensión; entre 13.8 y 132 kV, reduciéndose escalonadamente hasta llegar a una tensión de 400 o 230 V en el caso de usuarios domésticos. Las compañías distribuidoras son las propietarias y gestoras de estas líneas.

Los cambios de los niveles de tensión se realizan mediante estaciones o subestaciones de transformación. Los **transformadores** pueden ser elevadores o reductores.

3.1 Nudos eléctricos

Para definir el estado de una red eléctrica es necesario determinar el estado de los nudos linealmente independientes que la conforman. Como nudos eléctricos se conocen las centrales eléctricas y los puntos de consumo anteriormente descritos. Cualquier otro nudo que se quiera definir en la red eléctrica resulta de la interconexión entre estos puntos de generación y consumo, pudiendo determinarse su estado a partir del estado de los nudos generadores y los nudos carga (por lo que no se considerará un nudo linealmente independiente). Por ejemplo, para una red como la mostrada en la [Figura 3](#), se identifican seis nudos linealmente independientes (1, 3, 5, 8, 9 y 11).

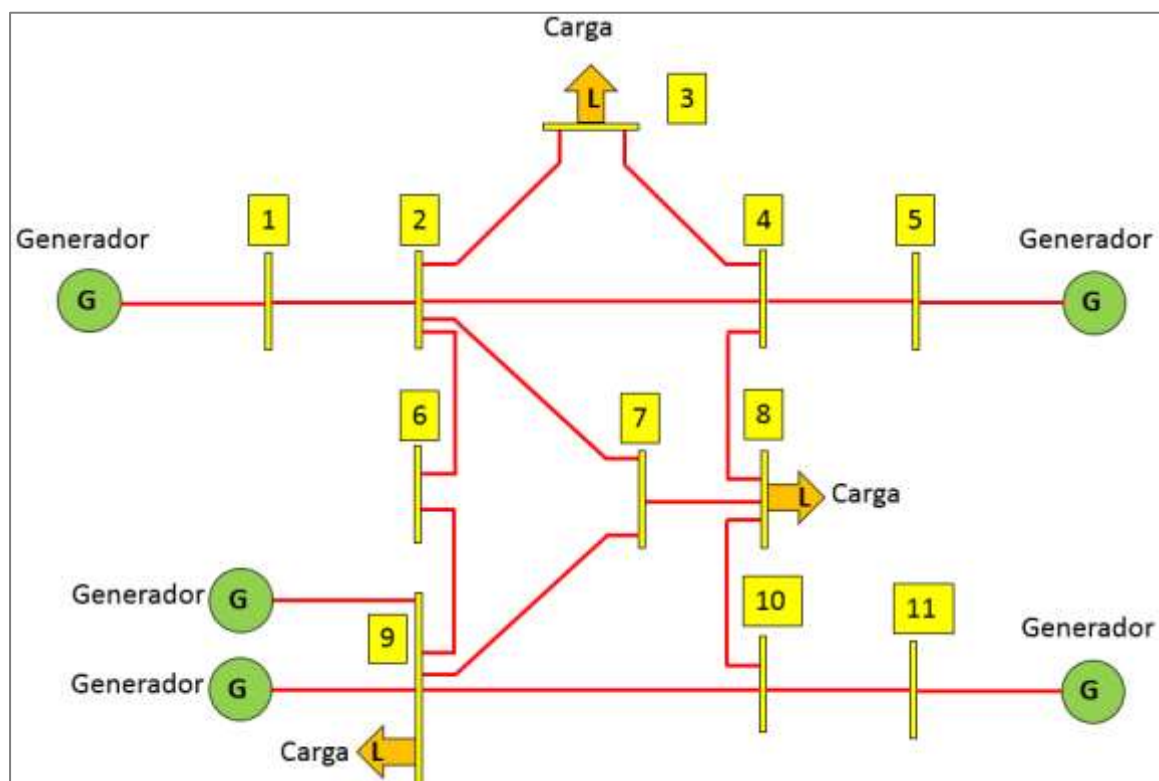


Figura 3. Diagrama unifilar simplificado de una red eléctrica.

El estado eléctrico de un nudo i se puede definir a través de varias variables:

- Módulo de la tensión de nudo V_i
- Argumento de la tensión de nudo δ_i

- Potencia activa de nudo P_i
- Potencia reactiva de nudo Q_i

Las potencias de nudo representan las potencias inyectadas por ese nudo en el sistema eléctrico, por lo que se definen como la diferencia entre la potencia generada en ese nudo y la potencia consumida en ese nudo (véase la [Figura 4](#)):

$$P_i = \sum_i P_i^{generada} - \sum_i P_i^{consumida} \quad (1)$$

$$Q_i = \sum_i Q_i^{generada} - \sum_i Q_i^{consumida} \quad (2)$$

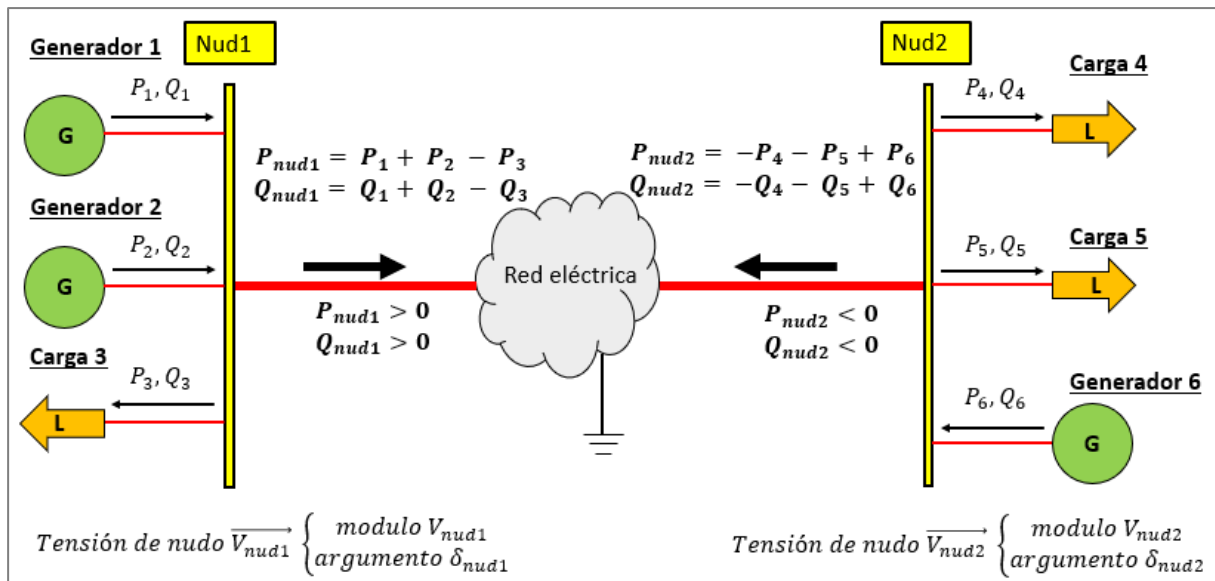


Figura 4. Ejemplo de nudo generador o nudo PV (nudo “nud1” en la imagen) y nudo receptor o nudo PQ (nudo “nud2” en la imagen).

Se pueden distinguir dos tipos de nudos eléctricos:

Nudos PV. También se conocen como nudos de generación o de tensión controlada. Representan los puntos de generación de energía eléctrica. En ellos se conoce la potencia activa P_{nud} suministrada a la red y el nivel de tensión V_{nud} al que operan (el cual se puede regular, debido a que se trata de reguladores de tensión). La potencia reactiva es una variable que se ajusta al valor requerido por el sistema, cuando se mantiene una magnitud constante de voltaje en terminales.

inyectan energía en la red, mediante la generación de potencia a lo largo del tiempo. La potencia activa suele ser generada (si fuera consumida funcionarían como motores), mientras que la potencia reactiva puede ser inyectada en la red (fdp inductivo o en retraso), consumida (fdp en capacitivo o en adelanto) o nula (factor de potencia unidad).

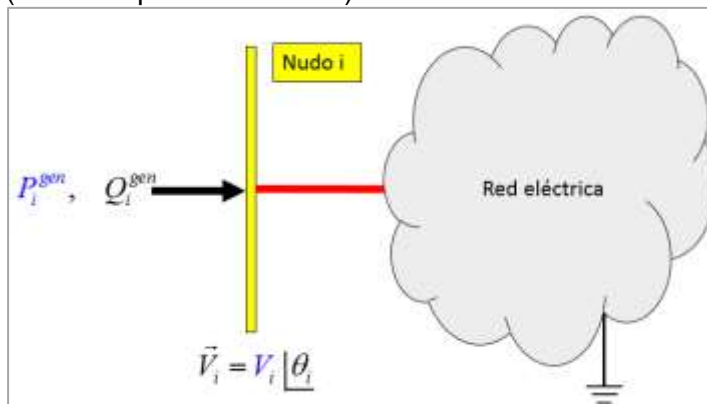


Figura 5. Esquema de un nudo PV.

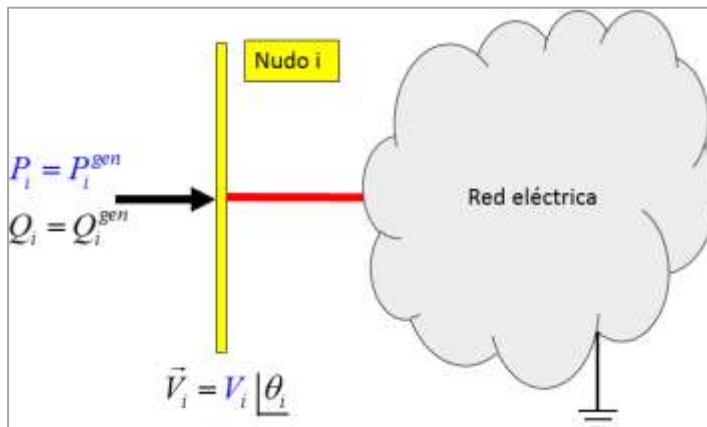


Figura 6. Convenio de signos de potencias para un nudo PV.

Existe un tipo especial de nudo PV, conocido como **nudo balance** (también conocido como “swing” o “slack”). La enumeración de los nudos eléctricos del sistema es arbitraria, pero por comodidad se le asigna el número 1 al nudo balance. En él se fija la tensión en módulo V_{nud} y argumento δ_{nud} (que sirve como referencia de fases para calcular los desfases eléctricos en los demás nudos). Normalmente se toma la tensión nominal y un ángulo de cero grados. Este nudo no se puede elegir arbitrariamente, ya que debe de tener una capacidad de generación significativa dentro del conjunto de nudos PV de la red, además de estar situado en un área fuertemente interconectada.

Las potencias de dicho nudo tomarán los valores necesarios para que se cumpla el balance de potencias en el sistema (generación = demanda + pérdidas). Las pérdidas reactivas no tienen el mismo sentido de pérdidas en forma de calor, sino los requerimientos de energía reactiva de los elementos de transmisión.

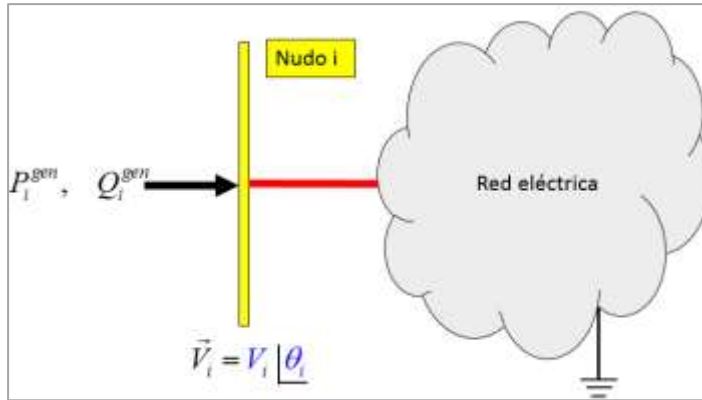


Figura 7. Esquema de un nudo balance.

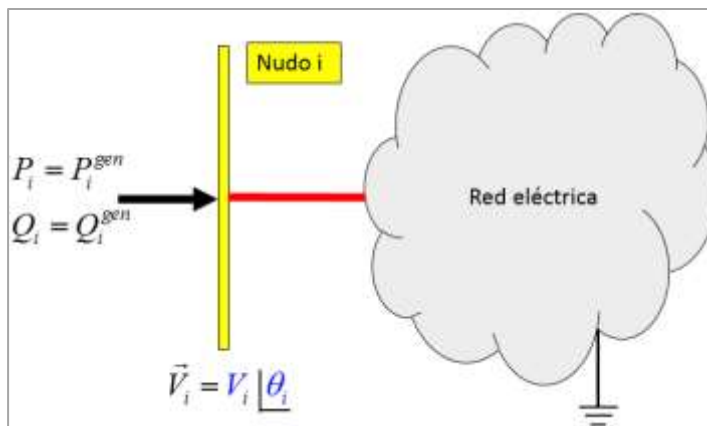


Figura 8. Convenio de signos para un nudo balance.

Nudos PQ. En ellos se conoce la potencia activa P_{nud} y reactiva Q_{nud} consumidas por las cargas (demandada por los consumidores). Se considerarán las cargas constantes, dado que a lo largo del día la demanda eléctrica suele variar de forma lenta. Alternativamente se pueden modelar diferentes escenarios de cargas, que variarán entre unos valores mínimos y máximos preestablecidos. Como caso particular se pueden mencionar los nodos de interconexión, cuya potencia activa y reactiva demandada son ambas cero.

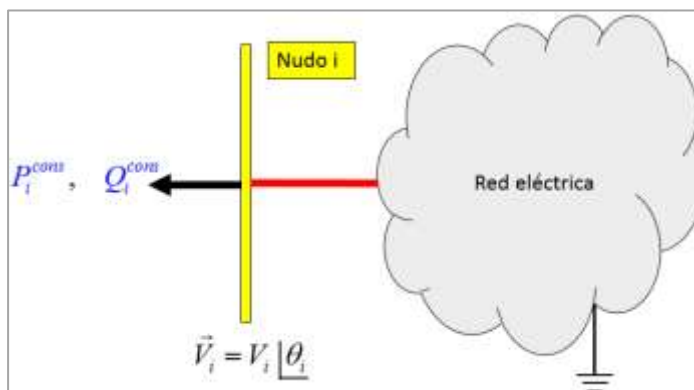


Figura 9. Esquema de un nudo PQ.

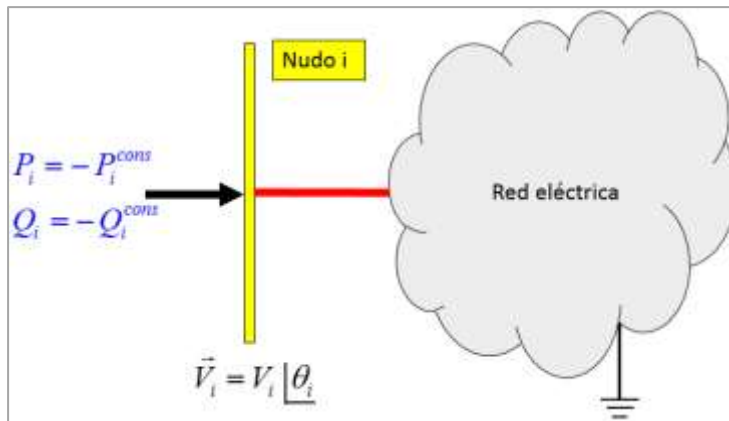


Figura 10. Convenio de signos para un nudo PQ.

En el caso de la red eléctrica mostrada en la [Figura 3](#), se pueden distinguir los siguientes tipos de nudos:

- Nudos PV: nudos 1, 5 y 11 (el 1 podría tomarse como nudo balance).
- Nudos PQ: nudos 3 y 8.
- Nudos dependientes: nudos 2, 4, 6, 7 y 10.
- El nudo 9 es un caso singular que combina generación y consumo (se consideraría nudo PV si tuviera un margen considerable de variación de potencia reactiva, o nudo PQ en caso contrario).

Según el teorema de Boucherot, la potencia generada debe ser consumida o disipada en forma de pérdidas. Las potencias activas generadas se conocen, pues se tratan de nudos PV, al igual que las potencias consumidas, ya que se trata de nudos PQ. Sin embargo, la potencia de pérdidas a priori se desconoce, puesto que depende del estado de la red. Por esta razón, en el nudo balance no se fija el valor de la potencia activa ni reactiva, ya que podrán variar entre unos límites mínimo y máximo (creando un intervalo considerable), de forma que siempre ajuste su potencia para compensar las pérdidas de las líneas y asegurar el suministro de potencia a las cargas.

3.2 Ramas eléctricas

Como ramas eléctricas se definen los circuitos que une 2 o más nudos, tratándose generalmente de líneas de transporte eléctricas; aunque también pueden ser transformadores, reactancias de generadores y admitancias de derivación a tierra. Las líneas de transmisión pueden transmitir sólo ciertas cantidades de potencia (cargabilidad), definidos por límites térmicos y de estabilidad, pero no se tendrán en cuenta en el presente trabajo. Las ramas que interconectan los nudos entre sí son las líneas eléctricas. Además de interconectar nudos, las líneas pueden servir como derivaciones; por ejemplo, para conectar un banco de condensadores que permita compensar el factor de potencia. Las líneas eléctricas pueden representarse eléctricamente mediante impedancias o mediante admitancias. En el caso de escoger el modelo de admitancias, las líneas se indican con sus valores de admitancia y_{ij} , que conectan el nudo i con el nudo j .

A efectos de generalización, se empleará el modelo de cuadripolo eléctrico, como el mostrado en la [Figura 11](#). Mediante “S” (“source”) se denotan los terminales fuente (que se encuentran a una tensión \vec{V}_S y generan una corriente \vec{I}_S), mientras que mediante “R” (“receptor”) se representan los terminales carga (que se encuentran a una tensión \vec{V}_R y consumen una corriente \vec{I}_R). Por lo tanto, la potencia fluye de los terminales fuente hacia los terminales carga.

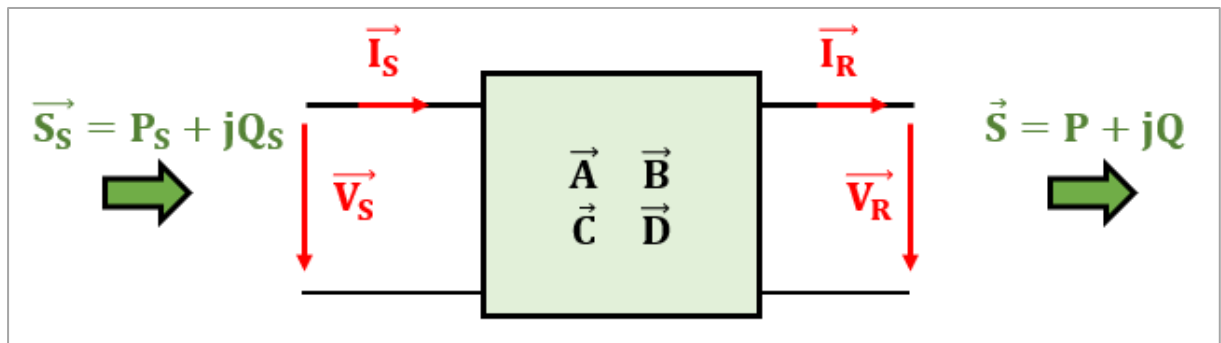


Figura 11. Representación de una línea eléctrica mediante un cuadripolo.

Los parámetros $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ son las constantes generalizadas del cuadripolo, que permiten relacionar las variables eléctricas de la fuente (\vec{V}_S, \vec{I}_S) con la carga (\vec{V}_R, \vec{I}_R):

$$\begin{aligned}\vec{V}_S &= \vec{A} \cdot \vec{V}_R + \vec{B} \cdot \vec{I}_R \\ \vec{I}_S &= \vec{C} \cdot \vec{V}_R + \vec{D} \cdot \vec{I}_R\end{aligned}\tag{3}$$

Las dimensiones de cada parámetro son las siguientes:

- A: adimensional.
- B: ohmios (Ω).
- C: siemens (Ω^{-1}).
- D: adimensional.

El modelo de cuadripolo eléctrico de la [Figura 11](#) se puede adaptar para el estudio de flujo de cargas tal como se muestra a continuación:

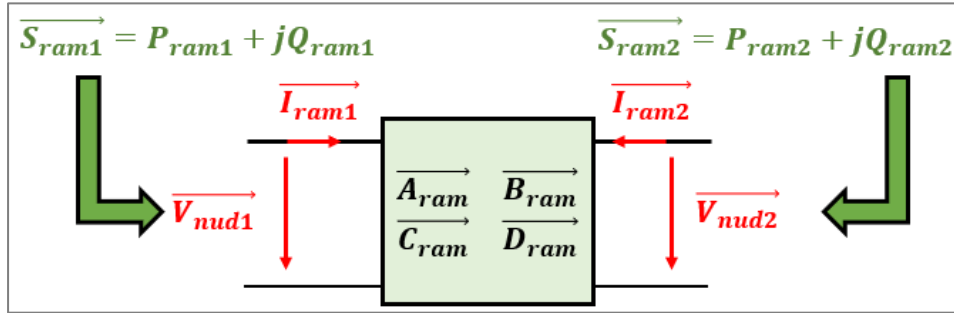


Figura 12. Modelo eléctrico de una rama “ram” que conecta los nudos “nud1” y “nud2”

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{V_{nud1}} \\ \overrightarrow{I_{ram1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_{ram}} & \overrightarrow{B_{ram}} \\ \overrightarrow{C_{ram}} & \overrightarrow{D_{ram}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{V_{nud2}} \\ -\overrightarrow{I_{ram2}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{nud1}} &= \overrightarrow{A_{ram}} \cdot \overrightarrow{V_{nud2}} - \overrightarrow{B_{ram}} \cdot \overrightarrow{I_{ram2}} \\ \overrightarrow{I_{ram1}} &= \overrightarrow{C_{ram}} \cdot \overrightarrow{V_{nud2}} - \overrightarrow{D_{ram}} \cdot \overrightarrow{I_{ram2}} \end{aligned} \quad (5)$$

Por lo tanto, las corrientes de rama se pueden determinar a partir de las tensiones de nudo y los parámetros de la línea (englobados dentro de las constantes generalizadas del cuadripolo):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I_{ram2}} &= -\frac{1}{\overrightarrow{B_{ram}}} \overrightarrow{V_{nud1}} + \frac{\overrightarrow{A_{ram}}}{\overrightarrow{B_{ram}}} \overrightarrow{V_{nud2}} \\ \overrightarrow{I_{ram1}} &= \overrightarrow{C_{ram}} \cdot \overrightarrow{V_{nud2}} + \overrightarrow{D_{ram}} \cdot \left(\frac{1}{\overrightarrow{B_{ram}}} \overrightarrow{V_{nud1}} - \frac{\overrightarrow{A_{ram}}}{\overrightarrow{B_{ram}}} \overrightarrow{V_{nud2}} \right) \\ \overrightarrow{I_{ram1}} &= \frac{\overrightarrow{D_{ram}}}{\overrightarrow{B_{ram}}} \overrightarrow{V_{nud1}} + \frac{\overrightarrow{C_{ram}} \cdot \overrightarrow{B_{ram}} - \overrightarrow{A_{ram}} \cdot \overrightarrow{D_{ram}}}{\overrightarrow{B_{ram}}} \overrightarrow{V_{nud2}} \end{aligned} \quad (6)$$

También se pueden determinar las potencias entregadas por los nudos a la rama,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_{ram1}} &= \overrightarrow{V_{nud1}} \cdot \overrightarrow{I_{ram1}}^* \\ \overrightarrow{S_{ram2}} &= \overrightarrow{V_{nud2}} \cdot \overrightarrow{I_{ram2}}^* \end{aligned} \quad (7)$$

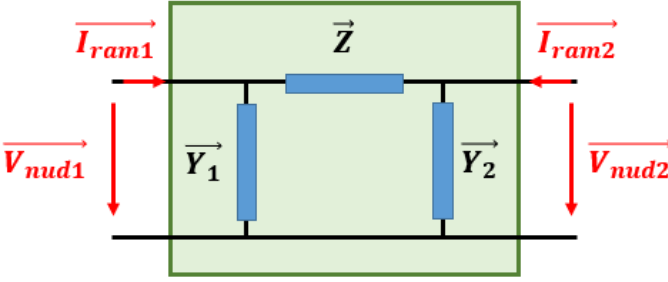
Conociendo la potencia a la entrada y a la salida de la rama, se pueden determinar las pérdidas como la diferencia entre las mismas,

$$\overrightarrow{S_{perd}} = \overrightarrow{S_{ram1}} + \overrightarrow{S_{ram2}} \quad (8)$$

Por lo tanto, el estado de una rama queda inequívocamente determinado mediante el conocimiento de las tensiones complejas de los nudos a ambos extremos de dicha rama.

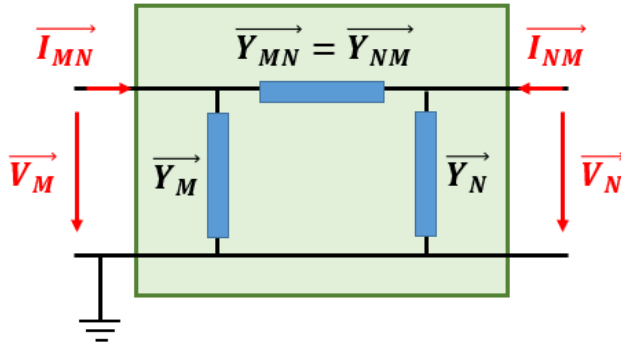
Las constantes generalizadas de la línea $\overrightarrow{A_{ram}}$, $\overrightarrow{B_{ram}}$, $\overrightarrow{C_{ram}}$, $\overrightarrow{D_{ram}}$ se referirán al modelo en PI de parámetros concentrados de un cuadripolo eléctrico:

Tabla 1. Constantes generalizadas del cuadripolo eléctrico modelo Pi

	$\overrightarrow{A_{ram}} = 1 + \vec{Z} \cdot \vec{Y}_2$
	$\overrightarrow{B_{ram}} = \vec{Z} = \frac{1}{\vec{Y}}$
	$\overrightarrow{C_{ram}} = \vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Z} \cdot \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2$
	$\overrightarrow{D_{ram}} = 1 + \vec{Z} \cdot \vec{Y}_1$

Análogamente, se puede definir la corriente de rama en función de dichos parámetros:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I_{ram1}} &= \vec{Y}_1 \cdot \vec{V_{nud1}} + \frac{\vec{V_{nud1}} - \vec{V_{nud2}}}{\vec{Z}} = \vec{V_{nud1}} \cdot (\vec{Y} + \vec{Y}_1) - \vec{V_{nud2}} \cdot \vec{Y} \\ \overrightarrow{I_{ram2}} &= \vec{Y}_2 \cdot \vec{V_{nud2}} + \frac{\vec{V_{nud2}} - \vec{V_{nud1}}}{\vec{Z}} = \vec{V_{nud2}} \cdot (\vec{Y} + \vec{Y}_2) - \vec{V_{nud1}} \cdot \vec{Y} \end{aligned} \quad (9)$$



Empleando una notación más genérica:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I_{MN}} &= \vec{V}_M \cdot (\vec{Y_{MN}} + \vec{Y}_M) - \vec{V}_N \cdot \vec{Y_{MN}} \\ \overrightarrow{I_{NM}} &= \vec{V}_N \cdot (\vec{Y_{MN}} + \vec{Y}_M) - \vec{V}_M \cdot \vec{Y_{MN}} \end{aligned} \quad (10)$$

Se puede extender el razonamiento anterior para determinar la corriente inyectada en un nudo "x", aplicando la primera ley de Kirchhoff; que establece que la corriente inyectada en un nudo es igual al sumatorio de las corrientes de rama de todas y cada una de las ramas que parten de dicho nudo:

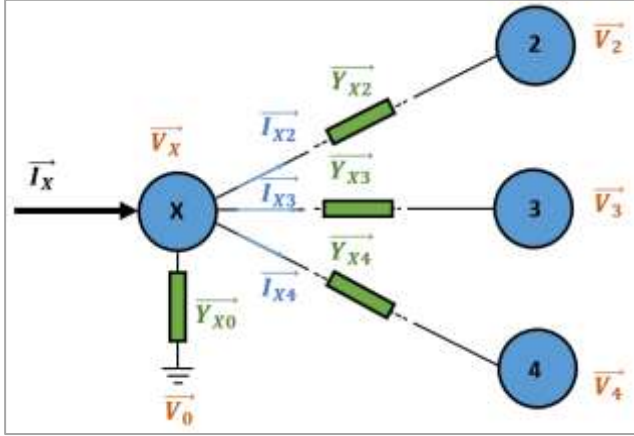


Figura 13. Aplicación de la primera ley de Kirchhoff

$$\vec{I}_x = \sum_{nudo} \vec{I}_{x-nudo} = \sum_0 [\vec{Y}_{x-0} \cdot (\vec{V}_x - \vec{V}_0)] + \sum_{nudo} [\vec{Y}_{x-nudo} \cdot (\vec{V}_x - \vec{V}_{nudo})] \quad (11)$$

Considerando la derivación a tierra $V_0 = 0V$:

$$\vec{I}_x = \sum_{nudo} \vec{I}_{x-nudo} = \vec{V}_x \cdot \sum_{nudo=0}^{nudo=n} (\vec{Y}_{x-nudo}) - \sum_{\substack{nudo=1 \\ nudo \neq x}}^{nudo=n} (\vec{V}_{nudo} \cdot \vec{Y}_{x-nudo}) \quad (12)$$

El razonamiento anterior se puede extender a sistemas más complejos, como el sistema de 8 nudos de la [Figura 14](#).

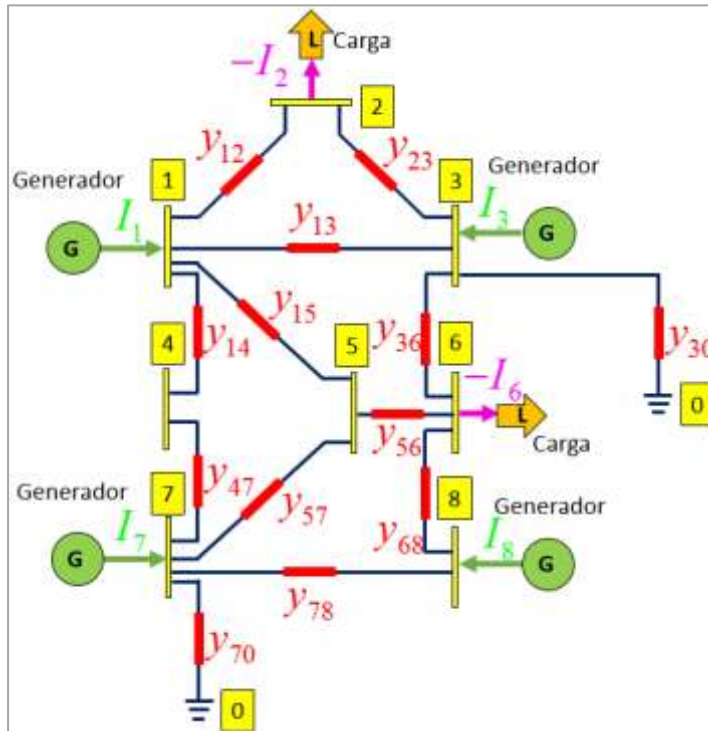


Figura 14. Red eléctrica con sus admitancias. Criterio de signos para corrientes eléctricas.

Las corrientes inyectadas en los nudos se pueden relacionar con las tensiones a las que éstos se encuentran a través de la matriz de admitancias. Tomando por ejemplo el nudo 7:

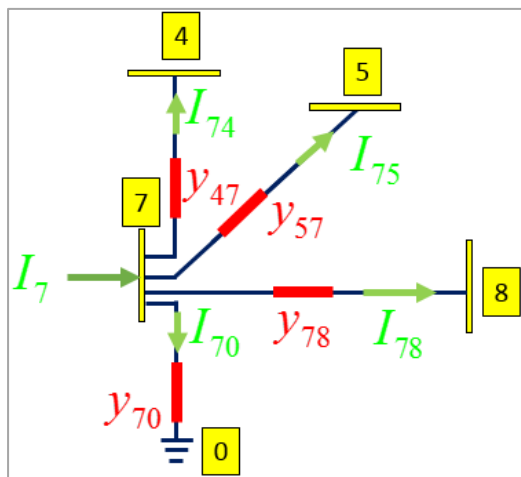


Figura 15. Flujo de corrientes en un nudo eléctrico.

Aplicando la Ley de Corrientes de Kirchhoff:

$$\begin{aligned}\vec{I}_7 &= \vec{I}_{70} + \vec{I}_{74} + \vec{I}_{75} + \vec{I}_{78} \\ \vec{I}_7 &= \vec{y}_{70} \cdot (\vec{V}_7 - 0) + \vec{y}_{47} \cdot (\vec{V}_7 - \vec{V}_4) + \vec{y}_{57} \cdot (\vec{V}_7 - \vec{V}_5) + \vec{y}_{78} \cdot (\vec{V}_7 - \vec{V}_8)\end{aligned}\tag{13}$$

$$\vec{I}_7 = \vec{V}_4 \cdot (-\vec{y}_{47}) + \vec{V}_5 \cdot (-\vec{y}_{57}) + \vec{V}_7 \cdot (\vec{y}_{70} + \vec{y}_{47} + \vec{y}_{57} + \vec{y}_{78}) + \vec{V}_8 \cdot (-\vec{y}_{78})$$

Procediendo análogamente para los demás nudos:

$$\begin{aligned} \vec{I}_1 &= \vec{y}_{12} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) + \vec{y}_{13} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_3) + \vec{y}_{14} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_4) + \vec{y}_{15} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_5) \\ \vec{I}_1 &= \vec{V}_1(\vec{y}_{12} + \vec{y}_{13} + \vec{y}_{14} + \vec{y}_{15}) + \vec{V}_2(-\vec{y}_{12}) + \vec{V}_3(-\vec{y}_{13}) + \vec{V}_4(-\vec{y}_{14}) + \vec{V}_5(-\vec{y}_{15}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_2 &= \vec{y}_{12} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) + \vec{y}_{23} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_3) \\ \vec{I}_2 &= \vec{V}_1 \cdot (-\vec{y}_{12}) + \vec{V}_2 \cdot (\vec{y}_{12} + \vec{y}_{23}) + \vec{V}_3 \cdot (-\vec{y}_{23}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_3 &= \vec{y}_{30} \cdot (\vec{V}_3 - 0) + \vec{y}_{13} \cdot (\vec{V}_3 - \vec{V}_1) + \vec{y}_{23} \cdot (\vec{V}_3 - \vec{V}_2) + \vec{y}_{36} \cdot (\vec{V}_3 - \vec{V}_6) \\ \vec{I}_3 &= \vec{V}_1 \cdot (-\vec{y}_{13}) + \vec{V}_2 \cdot (-\vec{y}_{23}) + \vec{V}_3 \cdot (\vec{y}_{30} + \vec{y}_{13} + \vec{y}_{23} + \vec{y}_{36}) + \vec{V}_6 \cdot (-\vec{y}_{36}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_4 &= \vec{y}_{14} \cdot (\vec{V}_4 - \vec{V}_1) + \vec{y}_{47} \cdot (\vec{V}_4 - \vec{V}_7) \\ \vec{I}_4 &= \vec{V}_1 \cdot (-\vec{y}_{14}) + \vec{V}_4 \cdot (\vec{y}_{14} + \vec{y}_{47}) + \vec{V}_7 \cdot (-\vec{y}_{47}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_5 &= \vec{y}_{15} \cdot (\vec{V}_5 - \vec{V}_1) + \vec{y}_{56} \cdot (\vec{V}_5 - \vec{V}_6) + \vec{y}_{57} \cdot (\vec{V}_5 - \vec{V}_7) \\ \vec{I}_5 &= \vec{V}_1 \cdot (-\vec{y}_{15}) + \vec{V}_5 \cdot (\vec{y}_{15} + \vec{y}_{56} + \vec{y}_{57}) + \vec{V}_6 \cdot (-\vec{y}_{56}) + \vec{V}_7 \cdot (-\vec{y}_{57}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_6 &= \vec{y}_{36} \cdot (\vec{V}_6 - \vec{V}_3) + \vec{y}_{56} \cdot (\vec{V}_6 - \vec{V}_5) + \vec{y}_{68} \cdot (\vec{V}_6 - \vec{V}_8) \\ \vec{I}_6 &= \vec{V}_3 \cdot (-\vec{y}_{36}) + \vec{V}_5 \cdot (-\vec{y}_{56}) + \vec{V}_6 \cdot (\vec{y}_{36} + \vec{y}_{56} + \vec{y}_{68}) + \vec{V}_8 \cdot (-\vec{y}_{68}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_8 &= \vec{y}_{68} \cdot (\vec{V}_8 - \vec{V}_6) + \vec{y}_{78} \cdot (\vec{V}_8 - \vec{V}_7) \\ \vec{I}_8 &= \vec{V}_6 \cdot (-\vec{y}_{68}) + \vec{V}_7 \cdot (-\vec{y}_{78}) + \vec{V}_8 \cdot (\vec{y}_{68} + \vec{y}_{78}) \end{aligned} \quad (20)$$

Es posible agrupar todas estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \\ \vec{I}_4 \\ \vec{I}_5 \\ \vec{I}_6 \\ \vec{I}_7 \\ \vec{I}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_{11} & \vec{y}_{12} & \vec{y}_{13} & \vec{y}_{14} & \vec{y}_{15} & \vec{y}_{16} & \vec{y}_{17} & \vec{y}_{18} \\ \vec{y}_{21} & \vec{y}_{22} & \vec{y}_{23} & \vec{y}_{24} & \vec{y}_{25} & \vec{y}_{26} & \vec{y}_{27} & \vec{y}_{28} \\ \vec{y}_{31} & \vec{y}_{32} & \vec{y}_{33} & \vec{y}_{34} & \vec{y}_{35} & \vec{y}_{36} & \vec{y}_{37} & \vec{y}_{38} \\ \vec{y}_{41} & \vec{y}_{42} & \vec{y}_{43} & \vec{y}_{44} & \vec{y}_{45} & \vec{y}_{46} & \vec{y}_{47} & \vec{y}_{48} \\ \vec{y}_{51} & \vec{y}_{52} & \vec{y}_{53} & \vec{y}_{54} & \vec{y}_{55} & \vec{y}_{56} & \vec{y}_{57} & \vec{y}_{58} \\ \vec{y}_{61} & \vec{y}_{62} & \vec{y}_{63} & \vec{y}_{64} & \vec{y}_{65} & \vec{y}_{66} & \vec{y}_{67} & \vec{y}_{68} \\ \vec{y}_{71} & \vec{y}_{72} & \vec{y}_{73} & \vec{y}_{74} & \vec{y}_{75} & \vec{y}_{76} & \vec{y}_{77} & \vec{y}_{78} \\ \vec{y}_{81} & \vec{y}_{82} & \vec{y}_{83} & \vec{y}_{84} & \vec{y}_{85} & \vec{y}_{86} & \vec{y}_{87} & \vec{y}_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \\ \vec{V}_5 \\ \vec{V}_6 \\ \vec{V}_7 \\ \vec{V}_8 \end{pmatrix} \quad (21)$$

De esta forma, el vector de corrientes de nudo se puede obtener a partir del vector de tensiones de nudo y la matriz de admitancias, que para el caso concreto de la [Figura 14](#) vendrá dada por:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{y_{12}} + \overrightarrow{y_{13}} + \overrightarrow{y_{14}} + \overrightarrow{y_{15}} & -\overrightarrow{y_{12}} & -\overrightarrow{y_{13}} & -\overrightarrow{y_{14}} & -\overrightarrow{y_{15}} & 0 & 0 & 0 \\ -\overrightarrow{y_{12}} & \overrightarrow{y_{12}} + \overrightarrow{y_{23}} & -\overrightarrow{y_{23}} & 0 & 0 & -\overrightarrow{y_{36}} & 0 & 0 \\ -\overrightarrow{y_{13}} & -\overrightarrow{y_{23}} & \overrightarrow{y_{30}} + \overrightarrow{y_{13}} + \overrightarrow{y_{23}} + \overrightarrow{y_{36}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\overrightarrow{y_{14}} & 0 & 0 & \overrightarrow{y_{14}} + \overrightarrow{y_{47}} & 0 & 0 & -\overrightarrow{y_{47}} & 0 \\ -\overrightarrow{y_{15}} & 0 & 0 & 0 & \overrightarrow{y_{15}} + \overrightarrow{y_{56}} + \overrightarrow{y_{67}} & -\overrightarrow{y_{56}} & -\overrightarrow{y_{67}} & 0 \\ 0 & 0 & -\overrightarrow{y_{36}} & 0 & -\overrightarrow{y_{56}} & \overrightarrow{y_{36}} + \overrightarrow{y_{56}} + \overrightarrow{y_{68}} & 0 & -\overrightarrow{y_{68}} \\ 0 & 0 & 0 & -\overrightarrow{y_{47}} & -\overrightarrow{y_{57}} & 0 & \overrightarrow{y_{70}} + \overrightarrow{y_{47}} + \overrightarrow{y_{57}} + \overrightarrow{y_{78}} & -\overrightarrow{y_{78}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overrightarrow{y_{68}} & -\overrightarrow{y_{78}} & \overrightarrow{y_{68}} + \overrightarrow{y_{78}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La matriz es simétrica:: $\overrightarrow{Y_{kl}} = \overrightarrow{Y_{lk}}$.
- El elemento de la diagonal $\overrightarrow{Y_{kk}}$ se obtiene como suma de todas las admitancias de línea conectadas al nudo k, incluyendo la línea de derivación. En realidad puede aplicarse el sumatorio a todas las líneas, y considerar la admitancia $\overrightarrow{Y_{lk}}$ cero cuando no existe línea entre los nudos i y k (por tener impedancia infinita):

$$\overrightarrow{Y_{kk}} = \overrightarrow{Y_{k0}} + \sum_{m=1, m \neq k}^n (\overrightarrow{Y_{km}}) = \sum_{m=0, m \neq k}^n (\overrightarrow{Y_{km}}) \quad (23)$$

- Los elementos fuera de la diagonal $\overrightarrow{Y_{ij}}$ se calculan como el opuesto de la admitancia de línea (nudos i y j admitancia mutua): $\overrightarrow{Y_{ij}} = -\overrightarrow{Y_{ji}}$

Además de los flujos de corriente originados por la interconexión de nudos, se deben considerar los flujos de corriente derivados de los acoplamientos magnéticos. En la [Tabla 2](#) se muestran dos líneas acopladas magnéticamente, caracterizadas por medio de una impedancia de acoplamiento electromagnético $\overrightarrow{Z_m} = j\omega M$ donde M es el coeficiente de inducción mutua. La conversión entre matriz de impedancias y admitancias se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{Y_a} & \pm \overrightarrow{Y_m} \\ \pm \overrightarrow{Y_m} & \overrightarrow{Y_b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{Z_a} & \pm \overrightarrow{Z_m} \\ \pm \overrightarrow{Z_m} & \overrightarrow{Z_b} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\overrightarrow{Z_a} \cdot \overrightarrow{Z_m} - \overrightarrow{Z_a} \cdot \overrightarrow{Z_m}} \begin{pmatrix} \overrightarrow{Z_b} & \mp \overrightarrow{Z_m} \\ \mp \overrightarrow{Z_m} & \overrightarrow{Z_a} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Rescribiendo la corriente de nudo considerando acoplamiento magnético:

$$\overrightarrow{I_X} = \overrightarrow{V_X} \cdot \left[\sum_{nud=0}^{nud=n} (\overrightarrow{Y_{X-nud}}) \pm \sum_{m=0}^{m=p} (\overrightarrow{Y_m}) \right] - \left[\sum_{\substack{nud=0 \\ nud \neq X}}^{nud=n} (\overrightarrow{V_{nud}} \cdot \overrightarrow{Y_{X-nud}}) \pm \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq X}}^{m=p} (\overrightarrow{V_m} \cdot \overrightarrow{Y_m}) \right] \quad (25)$$

Tabla 2. Ejemplos de acoplamiento magnético

	$\begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Z}_a & +\vec{Z}_m \\ +\vec{Z}_m & \vec{Z}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} \quad (26)$ $\begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_a & +\vec{Y}_m \\ +\vec{Y}_m & \vec{Y}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} \quad (27)$
	$\begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Z}_a & -\vec{Z}_m \\ -\vec{Z}_m & \vec{Z}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} \quad (28)$ $\begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_a & -\vec{Y}_m \\ -\vec{Y}_m & \vec{Y}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} \quad (29)$
	$\begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Z}_a & -\vec{Z}_m \\ -\vec{Z}_m & \vec{Z}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} \quad (30)$ $\begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_a & -\vec{Y}_m \\ -\vec{Y}_m & \vec{Y}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} \quad (31)$
	$\begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Z}_a & +\vec{Z}_m \\ +\vec{Z}_m & \vec{Z}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} \quad (32)$ $\begin{pmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_a & +\vec{Y}_m \\ +\vec{Y}_m & \vec{Y}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_i - \vec{V}_j \\ \vec{V}_k - \vec{V}_l \end{pmatrix} \quad (33)$

3.3 Transformadores

Los transformadores son máquinas eléctricas que permiten la transmisión de energía eléctrica de forma eficiente y económica. El transporte de energía eléctrica se realiza a baja intensidad eléctrica, puesto que las pérdidas son proporcionales a I^2R . Como la potencia eléctrica es el producto de corriente eléctrica por tensión, será necesario elevar la tensión para reducir las pérdidas de transmisión y mantener el nivel de potencia deseado; llevado a cabo mediante transformadores.

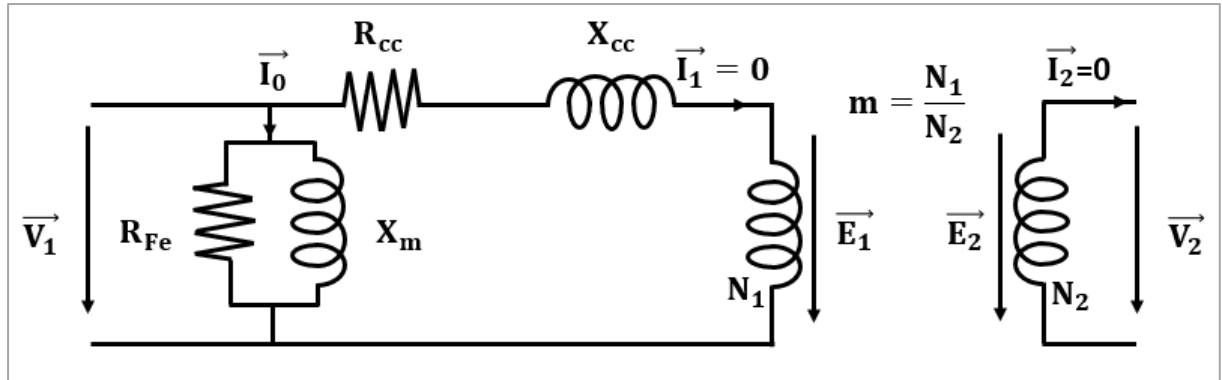


Figura 16. Esquema eléctrico de un transformador

Denotando el primario como nudo “i”, y el secundario como nudo “k”, se pueden englobar las pérdidas resistivas y la impedancia de vacío en una admitancia \vec{y} :

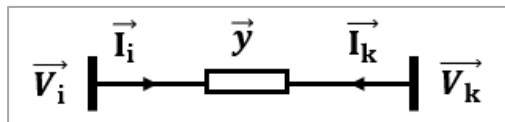


Figura 17. Esquema eléctrico simplificado de un transformador (pu)

Es frecuente que se pueda regular la tensión de salida del transformador, ya sea modificando la relación de vueltas (para controlar el módulo de la tensión) o cambiando el argumento de la tensión de salida (afectando a la potencia activa). De esta forma, cuando se modifica la relación de transformación nominal, será necesario incorporar la derivación o toma en el esquema eléctrico. Para ello se modificará el primario del transformador incorporando un factor \vec{a} , cuyo módulo indica el valor de la toma o espiras seleccionadas, y cuyo argumento determina el desfase introducido por el transformador:

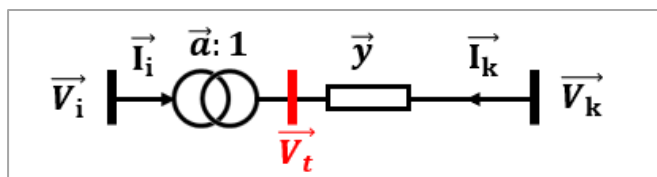


Figura 18. Incorporación de la regulación de la relación de transformación (factor \vec{a})

De esta forma

$$\frac{\vec{V}_l}{\vec{V}_t} = \frac{\vec{a}}{1} \quad (34)$$

Como la potencia del transformador se asume constante:

$$\vec{V}_l \cdot \vec{I}_l^* = \vec{V}_t \cdot \vec{I}_t^* \quad (35)$$

De donde se concluye que

$$\frac{\vec{I}_l}{\vec{I}_k} = \left(\frac{-1}{\vec{a}} \right)^* \quad (36)$$

$$\vec{I}_k = \vec{y} \cdot (\vec{V}_k - \vec{V}_t) = \vec{y} \cdot (\vec{V}_k) - \frac{\vec{y}}{\vec{a}} \cdot (\vec{V}_l) \quad (37)$$

En definitiva:

$$\begin{aligned} \vec{I}_l &= \vec{I}_k \cdot \left(\frac{-1}{\vec{a}} \right)^* = \vec{y} \cdot \left(\vec{V}_k - \frac{\vec{V}_l}{\vec{a}} \right) \cdot \left(\frac{-1}{\vec{a}} \right)^* = \frac{-\vec{y}}{\vec{a}^*} \cdot \left(\vec{V}_k - \frac{\vec{V}_l}{\vec{a}} \right) \\ \vec{I}_l &= -\frac{\vec{y}}{\vec{a}^*} \cdot (\vec{V}_k) + \frac{\vec{y}}{\vec{a}^2} \cdot (\vec{V}_l) \end{aligned} \quad (38)$$

4 FLUJO DE CARGA

4.1 Introducción

La generación de potencia se debe a que se inyecta corriente desde un nudo hacia la red. Similarmente, el consumo de potencia se debe a la absorción de corriente por el nudo de la red. El criterio de signos que se adoptará para el flujo de corrientes será el mismo que para las potencias; signo positivo si la corriente fluye desde el nudo hacia la red, y negativo si fluye desde la red hacia el nudo:

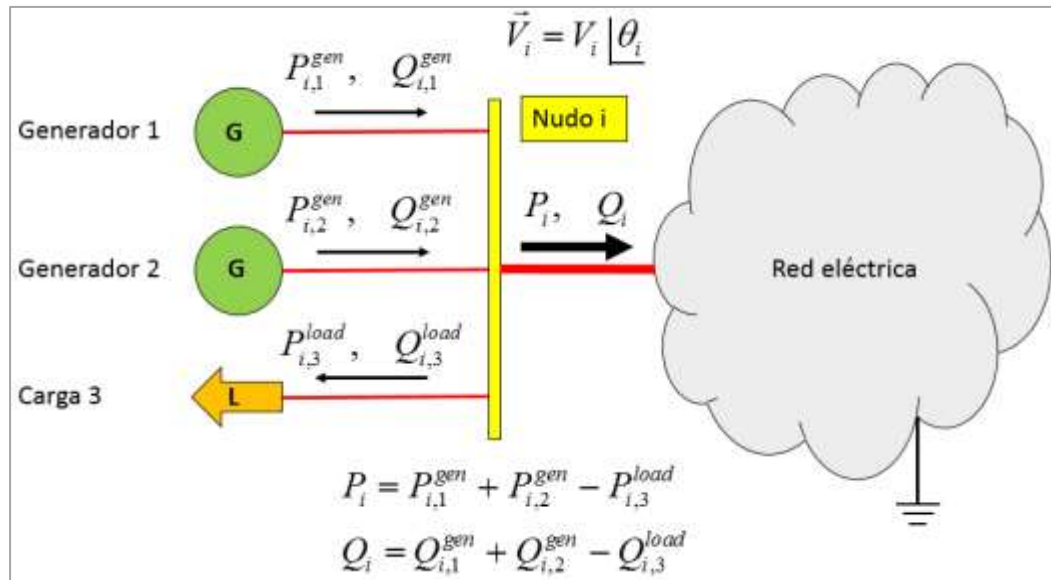


Figura 19. Flujo de potencia para un nudo PV.

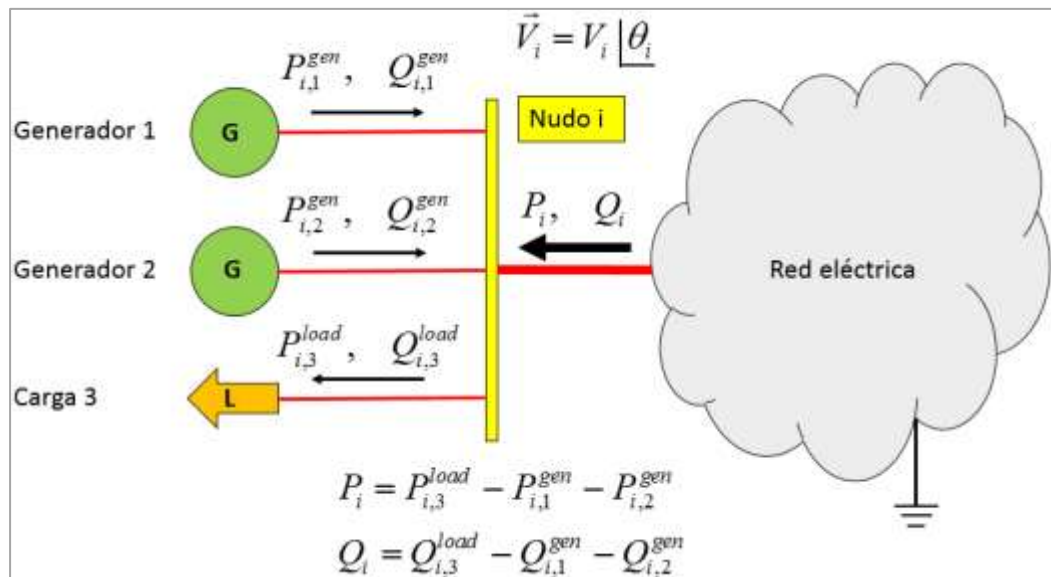


Figura 20. Flujo de potencia para un nudo PQ.

En primer lugar, se expresará la potencia de nudo en función de las tensiones de nudo y la matriz de admitancias del sistema eléctrico. En forma polar, la tensión de nudo \vec{V}_x se define en módulo (magnitud) V_x y argumento (ángulo) δ_x medido con respecto a una referencia de fases. De la misma manera, la admitancia de línea entre los nudos "x" y "k" \vec{Y}_{xk} se define en módulo (magnitud) Y_{xk} y argumento (ángulo) θ_{xk} medido con respecto a una referencia de fases:

$$\begin{aligned}\vec{V}_x &= V_x \angle \delta_x = V_x \cdot e^{j\delta_x} \\ \vec{Y}_{xk} &= Y_{xk} \angle \theta_{xk} = Y_{xk} \cdot e^{j\theta_{xk}} = G_{xk} + j \cdot B_{xk}\end{aligned}\quad (39)$$

Partiendo de la primera ley de Kirchhoff, se define la corriente del nudo x:

$$\vec{I}_x = \sum_{k=1}^{k=n} (\vec{I}_{xk})^* = \sum_{k=1}^{k=n} (\vec{V}_k \cdot \vec{Y}_{xk})^* = \sum_{k=1}^{k=n} (V_k \cdot e^{j\delta_k} \cdot Y_{xk} \cdot e^{j\theta_{xk}})^* \quad (40)$$

Conociendo la corriente y tensión de nudo, se define la potencia de nudo:

$$\vec{S}_x = \vec{V}_x \cdot \vec{I}_x^* = V_x \cdot e^{j\delta_x} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} (V_k \cdot Y_{xk} \cdot e^{j(\delta_k + \theta_{xk})})^* = \sum_{nudo=1}^{nudo=n} [V_x \cdot V_k \cdot Y_{xk} \cdot e^{j(\delta_x - \delta_k - \theta_{xk})}] \quad (41)$$

Separando en parte real e imaginaria, se definen las funciones potencia activa y potencia reactiva del nudo x; que proporcionan las potencias de nudo:

$$\begin{aligned}P_x^f &= \sum_{k=1}^{k=n} [V_x \cdot V_k \cdot Y_{xk} \cdot \cos(\delta_x - \delta_k - \theta_{xk})] \\ Q_x^f &= \sum_{k=1}^{k=n} [V_x \cdot V_k \cdot Y_{xk} \cdot \sin(\delta_x - \delta_k - \theta_{xk})]\end{aligned}\quad (42)$$

Aplicando identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}P_x^f &= \sum_{k=1}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot Y_{xk} \cdot [\cos(\delta_{xk}) \cdot \cos(-\theta_{xk}) - \sin(\delta_{xk}) \cdot \sin(-\theta_{xk})]\} \\ Q_x^f &= \sum_{k=1}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot Y_{xk} \cdot [\sin(\delta_{xk}) \cdot \cos(-\theta_{xk}) + \cos(\delta_{xk}) \cdot \sin(-\theta_{xk})]\}\end{aligned}\quad (43)$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned}P_x^f &= \sum_{k=1}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk})\} \\ Q_x^f &= \sum_{k=1}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk})\}\end{aligned}\quad (44)$$

Por comodidad, se desglosa el elemento “x” del sumatorio:

$$\begin{aligned} P_x^f &= V_x^2 \cdot G_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk})\} \\ Q_x^f &= -V_x^2 \cdot B_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk})\} \end{aligned} \quad (45)$$

4.2 Método de Gauss-Seidel

El objetivo es resolver el sistema de ecuaciones $\vec{I} = \vec{Y} \cdot \vec{V}$, partiendo del conocimiento de la matriz de admitancias \vec{Y} :

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \\ \vdots \\ \vec{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{11} & \vec{Y}_{12} & \vec{Y}_{13} & \cdots & \vec{Y}_{n1} \\ \vec{Y}_{21} & \vec{Y}_{22} & \vec{Y}_{23} & \cdots & \vec{Y}_{n2} \\ \vec{Y}_{31} & \vec{Y}_{32} & \vec{Y}_{33} & \cdots & \vec{Y}_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{Y}_{n1} & \vec{Y}_{n2} & \vec{Y}_{n3} & \cdots & \vec{Y}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vdots \\ \vec{V}_n \end{pmatrix} \quad (46)$$

Descomponiendo la matriz de admitancias \vec{Y} en la suma de una matriz triangular inferior \vec{L} , una matriz diagonal \vec{D} , y una matriz triangular superior \vec{U} :

$$\vec{Y} = \vec{L} + \vec{D} + \vec{U}$$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vec{Y}_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vec{Y}_{31} & \vec{Y}_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{Y}_{n1} & \vec{Y}_{n2} & \vec{Y}_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{Y}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vec{Y}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vec{Y}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vec{Y}_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \vec{Y}_{12} & \vec{Y}_{13} & \cdots & \vec{Y}_{1n} \\ 0 & 0 & \vec{Y}_{23} & \cdots & \vec{Y}_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vec{Y}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Por lo tanto:

$$\vec{I} = \vec{Y} \cdot \vec{V} = (\vec{L} + \vec{D} + \vec{U}) \cdot \vec{V} \Rightarrow (\vec{L} + \vec{D}) \cdot \vec{V} = \vec{I} - \vec{U} \cdot \vec{V} \quad (48)$$

Suponiendo que en la diagonal no existen elementos nulos, se pueden invertir matrices:

$$\vec{V} = (\vec{L} + \vec{D})^{-1} \cdot \vec{I} - (\vec{L} + \vec{D})^{-1} \cdot \vec{U} \cdot \vec{V}$$

$$\vec{V}^{(1)} = (\vec{L} + \vec{D})^{-1} \cdot \vec{I} - (\vec{L} + \vec{D})^{-1} \cdot \vec{U} \cdot \vec{V}^{(0)} \quad (49)$$

Reordenando términos:

$$(\vec{L} + \vec{D}) \cdot \vec{V}^{(1)} + \vec{U} \cdot \vec{V}^{(0)} = \vec{I}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{Y}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vec{Y}_{21} & \vec{Y}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vec{Y}_{31} & \vec{Y}_{32} & \vec{Y}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{Y}_{n1} & \vec{Y}_{n2} & \vec{Y}_{n3} & \cdots & \vec{Y}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{V}_1^{(1)} \\ \vec{V}_2^{(1)} \\ \vec{V}_3^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{V}_n^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \vec{Y}_{12} & \vec{Y}_{13} & \cdots & \vec{Y}_{1n} \\ 0 & 0 & \vec{Y}_{23} & \cdots & \vec{Y}_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vec{Y}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{V}_1^{(0)} \\ \vec{V}_2^{(0)} \\ \vec{V}_3^{(0)} \\ \vdots \\ \vec{V}_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \\ \vdots \\ \vec{I}_n \end{pmatrix} \quad (50)$$

Reescribiendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{Y_{11}} \cdot \overrightarrow{V_1^{(1)}} + \overrightarrow{Y_{12}} \cdot \overrightarrow{V_2^{(0)}} + \overrightarrow{Y_{13}} \cdot \overrightarrow{V_3^{(0)}} + \dots + \overrightarrow{Y_{1n}} \cdot \overrightarrow{V_n^{(0)}} &= \overrightarrow{I_1^{(1)}} \\
 \overrightarrow{Y_{21}} \cdot \overrightarrow{V_1^{(1)}} + \overrightarrow{Y_{22}} \cdot \overrightarrow{V_2^{(1)}} + \overrightarrow{Y_{23}} \cdot \overrightarrow{V_3^{(0)}} + \dots + \overrightarrow{Y_{2n}} \cdot \overrightarrow{V_n^{(0)}} &= \overrightarrow{I_2^{(1)}} \\
 \overrightarrow{Y_{31}} \cdot \overrightarrow{V_1^{(1)}} + \overrightarrow{Y_{32}} \cdot \overrightarrow{V_2^{(1)}} + \overrightarrow{Y_{33}} \cdot \overrightarrow{V_3^{(1)}} + \dots + \overrightarrow{Y_{3n}} \cdot \overrightarrow{V_n^{(0)}} &= \overrightarrow{I_3^{(1)}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \overrightarrow{Y_{n1}} \cdot \overrightarrow{V_1^{(1)}} + \overrightarrow{Y_{n2}} \cdot \overrightarrow{V_2^{(1)}} + \overrightarrow{Y_{n3}} \cdot \overrightarrow{V_3^{(1)}} + \dots + \overrightarrow{Y_{nn}} \cdot \overrightarrow{V_n^{(1)}} &= \overrightarrow{I_n^{(1)}}
 \end{aligned} \tag{51}$$

La tensión compleja en el nudo f valdrá:

$$\overrightarrow{V_f^{(1)}} = \frac{1}{\overrightarrow{Y_{ff}}} \cdot \left[\overrightarrow{I_f^{(1)}} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \in f}}^{k=f-1} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(1)}} - \sum_{k=f+1}^{k=n} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(0)}} \right] \begin{cases} f = 1, 2, 3, \dots, n \\ f \neq \text{nudo balance} \end{cases} \tag{52}$$

Para el nudo balance se fija la tensión de nudo en módulo y argumento, por lo que no es necesario determinarla.

$$\overrightarrow{V_f^{(1)}} = \frac{1}{\overrightarrow{Y_{ff}}} \cdot \left[\frac{P_f^{(1)} - jQ_f^{(1)}}{\overrightarrow{V_f^{(0)*}}} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \in f}}^{k=f-1} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(1)}} - \sum_{k=f+1}^{k=n} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(0)}} \right] \begin{cases} f = 1, 2, 3, \dots, n \\ f \neq \text{nudo balance} \end{cases} \tag{53}$$

Para los nudos PQ, la potencia activa y reactiva vienen determinadas, mientras que para los nudos PV se debe estimar la potencia reactiva Q_f (que se actualizará en cada iteración):

$$\overrightarrow{S_f^{(1)}} = \overrightarrow{V_f^{(0)}} \cdot \left[\overrightarrow{I_f^{(1)}} \right]^* = \overrightarrow{V_f^{(0)}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=f-1} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(1)}} + \sum_{k=f}^{k=n} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(0)}} \right]^* \quad f = 1, 2, 3, \dots, n \tag{54}$$

Por lo tanto, para una iteración genérica “ite+1”:

1. Determinación de la matriz de admitancias \overrightarrow{Y}
2. Se parte del vector de tensiones obtenido en la iteración interior $\overrightarrow{V_f^{(ite)}}$. Como para la primera iteración no se conoce la tensión de los nudos PQ, ni el argumento de la tensión de los nudos PV; se puede iniciar con un perfil plano de tensiones (módulo de 1 pu y argumento de 0°). Esta hipótesis no es del todo inapropiada, puesto que las tensiones operativas no difieren mucho de las nominales, además de presentar desfases pequeños por motivos de estabilidad.

3. Las inyecciones de potencia de los nudos PQ son conocidas. Para los nudos PV se estima la potencia reactiva. Asumiendo que los nudos 1,2, f y n son nudos PV:

$$\overrightarrow{Q_1^{(ite+1)}} = \text{Imag} \left\{ \overrightarrow{V_1^{(ite)}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=n} \overrightarrow{Y_{1k}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite)}} \right]^* \right\} \quad (55)$$

$$\overrightarrow{V_1^{(ite+1)}} = \frac{1}{\overrightarrow{Y_{11}}} \cdot \left[\frac{P_1 - jQ_1^{(ite+1)}}{[\overrightarrow{V_1^{(ite)}}]^*} - \sum_{k=2}^{k=n} \overrightarrow{Y_{1k}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite)}} \right] \quad (56)$$

$$\overrightarrow{Q_2^{(ite+1)}} = \text{Imag} \left\{ \overrightarrow{V_2^{(ite)}} \cdot \left[\overrightarrow{Y_{11}} \cdot \overrightarrow{V_1^{(ite+1)}} + \sum_{k=2}^{k=n} \overrightarrow{Y_{2k}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite)}} \right]^* \right\} \quad (57)$$

$$\overrightarrow{V_2^{(ite+1)}} = \frac{1}{\overrightarrow{Y_{22}}} \cdot \left[\frac{P_2 - jQ_2^{(ite+1)}}{[\overrightarrow{V_2^{(ite)}}]^*} - \overrightarrow{Y_{11}} \cdot \overrightarrow{V_1^{(ite+1)}} - \sum_{k=2}^{k=n} \overrightarrow{Y_{2k}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite)}} \right] \quad (58)$$

$$\overrightarrow{Q_f^{(ite+1)}} = \text{Imag} \left\{ \overrightarrow{V_f^{(ite)}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=f-1} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite+1)}} + \sum_{k=f}^{k=n} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite)}} \right]^* \right\} \quad (59)$$

$$\overrightarrow{V_f^{(ite+1)}} = \frac{1}{\overrightarrow{Y_{ff}}} \cdot \left[\frac{P_f - jQ_f^{(ite+1)}}{[\overrightarrow{V_f^{(ite)}}]^*} - \sum_{k=1}^{k=f-1} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite+1)}} - \sum_{k=f+1}^{k=n} \overrightarrow{Y_{fk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite)}} \right] \quad (60)$$

$$\overrightarrow{Q_n^{(ite+1)}} = \text{Imag} \left\{ \overrightarrow{V_n^{(ite)}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=n-1} \overrightarrow{Y_{nk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite+1)}} + \overrightarrow{Y_{nn}} \cdot \overrightarrow{V_n^{(ite)}} \right]^* \right\} \quad (61)$$

$$\overrightarrow{V_n^{(ite+1)}} = \frac{1}{\overrightarrow{Y_{nn}}} \cdot \left[\frac{P_n - jQ_n^{(ite+1)}}{[\overrightarrow{V_n^{(ite)}}]^*} - \sum_{k=1}^{k=n-1} \overrightarrow{Y_{nk}} \cdot \overrightarrow{V_k^{(ite+1)}} \right] \quad (62)$$

El proceso iterativo se detiene cuando se alcance un número de iteraciones máximo o cuando el error relativo aproximado es superior a un cierto umbral

$$\begin{aligned} \varepsilon_{modulo} &= \max \left\{ \frac{\left| \left| \vec{V}_f^{(ite+1)} \right| - \left| \vec{V}_f^{(ite)} \right| \right|}{\left| \vec{V}_f^{(ite+1)} \right|} \right\} < \varepsilon_{admisible,mod} \\ \varepsilon_{argumento} &= \max \left\{ \frac{\left| \arg \left(\vec{V}_f^{(ite+1)} \right) - \arg \left(\vec{V}_f^{(ite)} \right) \right|}{\arg \left(\vec{V}_f^{(ite+1)} \right)} \right\} < \varepsilon_{admisible,arg} \end{aligned} \quad (63)$$

Si se desea acelerar la convergencia se puede introducir el factor α :

$$\begin{aligned} \vec{V}_f^{(ite)} &= \frac{\alpha}{\vec{Y}_{ff}} \cdot \left[\vec{I}_f^{(ite)} - \sum_{k=1}^{k=f-1} \vec{Y}_{fk} \cdot \vec{V}_k^{(ite)} - \sum_{k=f+1}^{k=n} \vec{Y}_{fk} \cdot \vec{V}_k^{(ite-1)} \right] + (1 - \alpha) \cdot \vec{V}_f^{(ite-1)} \\ f &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (64)$$

El factor alfa puede variar entre 1.0 y 2.0 (generalmente se considera el rango de 1.4 a 1.6). La potencia reactiva generada debe estar dentro de unos límites mínimo y máximo. Si alguno de estos límites se viola, se fijará la tensión al valor mínimo o máximo preestablecido, y el nudo se convertirá a nudo PQ.

4.3 Método de Newton-Raphson

El punto de partida es el cálculo de las potencias de nudo:

$$P_x^{calc} = V_x^2 \cdot G_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk})\}$$

$$Q_x^{calc} = -V_x^2 \cdot B_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk})\}$$
(65)

La potencia de nudo depende por un lado de la matriz de admitancias, y por otro lado de las tensiones de nudo. La matriz de admitancias es independiente del estado eléctrico de la red (sólo depende de su configuración), por lo que las admitancias no se considerarán como incógnitas. Únicamente se tomarán como incógnitas las tensiones de nudo (módulo y argumento):

$$P_x^{calc} = P_x^{calc}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, V_1, V_2, \dots, V_n)$$

$$Q_x^{calc} = Q_x^{calc}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, V_1, V_2, \dots, V_n)$$
(66)

Tabla 3. Características de los nudos eléctricos

Nudos eléctricos	Nudo balance	Nudo PV	Nudo PQ
Número de nudos	1 nudo	PV nudos: 2,3,4,...,PV+1	(n-PV-1) nudos PV+2,PV+3,...,n
Módulo de la tensión V	$V_X = V^{red}$	$V_X = V^{red}$	$V_X = ?$
Argumento de la tensión δ	$\delta_X = 0$	$\delta_X = ?$	$\delta_X = ?$
Potencia activa P	$P_X = ?$	$P_X = P^{red}$	$P_X = P^{red}$
Potencia reactiva Q	$Q_X = ?$	$Q_X = ?$ $Q_{MIN} < Q_X < Q_{MAX}$	$Q_X = Q^{red}$

Como se conoce la potencia activa en nudos PV y PQ, así como la potencia reactiva en nudos PQ; se dispone de un total de $(PV) + 2 \cdot (n-PV-1) = 2n-PV-2$ ecuaciones. Para el resto de casos, la potencia de nudo se determinará a partir de las tensiones de nudo, por lo que no se considerarán como incógnitas.

Además, como se desconoce el argumento de la tensión en nudos PV y PQ, así como el módulo de la tensión en nudos PQ; se dispone de un total de $(n-1) + (n-PV-1) = 2n-PV-2$ incógnitas:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \dots \\ \delta_n \\ V_{PV+2} \\ V_{PV+3} \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix}$$
(67)

Se puede partir de un perfil plano de tensiones:

$$\vec{x}|^{(0)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(0)} \\ \dots \\ \delta_n^{(0)} \\ V_{PV+2}^{(0)} \\ V_{PV+3}^{(0)} \\ \dots \\ V_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^\circ \\ 0^\circ \\ \dots \\ 0^\circ \\ 1pu \\ 1pu \\ \dots \\ 1pu \end{pmatrix} \quad (68)$$

A partir de la estimación inicial, se determinan las potencias de nudo estimadas iniciales (iteración cero):

$$P_x^{calc} = V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)})\} \quad (69)$$

$$Q_x^{calc} = -V_x^2|^{(0)} \cdot B_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)})\}$$

Aplicando el desarrollo de Taylor, considerando únicamente los elementos de primer orden, a las funciones potencia del nudo x, y partiendo de la estimación inicial:

$$P_x^{calc}|^{(1)} = P_x^{calc}|^{(0)} + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} \Delta \delta_2^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} \Delta \delta_n^{(1)} + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_m} \right]^{(0)} \Delta V_m^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)} \quad (70)$$

$$Q_x^{calc}|^{(1)} = Q_x^{calc}|^{(0)} + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} \Delta \delta_2^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} \Delta \delta_n^{(1)} + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_m} \right]^{(0)} \Delta V_m^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)}$$

$$P_x^{red} - P_x^{calc}|^{(0)} = \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} \Delta \delta_2^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} \Delta \delta_n^{(1)} + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_m} \right]^{(0)} \Delta V_m^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)} \quad (71)$$

$$Q_x^{red} - Q_x^{calc}|^{(0)} = \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} \Delta \delta_2^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} \Delta \delta_n^{(1)} + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_m} \right]^{(0)} \Delta V_m^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)}$$

$$\Delta P_x^{(0)} = \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} \Delta \delta_2^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} \Delta \delta_n^{(1)} + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_m} \right]^{(0)} \Delta V_m^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)} \quad (72)$$

$$\Delta Q_x^{(0)} = \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} \Delta \delta_2^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} \Delta \delta_n^{(1)} + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_m} \right]^{(0)} \Delta V_m^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)}$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(0)} \\ \Delta Q_{PV+2}^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \\ \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \\ \Delta V_{PV+2}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta V_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad (73)$$

Para evaluar las derivadas parciales se retoman las potencias de nudo:

$$P_x^{calc} = V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx} + V_x|^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)})\}$$

$$Q_x^{calc} = -V_x^2|^{(0)} \cdot B_{xx} + V_x|^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)})\}$$
(74)

Se determinan los elementos del jacobiano:

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [-G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} \cdot (-1) + B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} \cdot (-1)]$$

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)}]$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(0)} \cdot [-G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)}]\}$$

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = -Q_x^{calc} - V_x^2|^{(0)} \cdot B_{xx}$$

(75)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)})$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = 2 \cdot V_x|^{(0)} \cdot G_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)})\}$$

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = \frac{P_x^{calc} - V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx}}{V_x|^{(0)}} + 2 \cdot V_x|^{(0)} \cdot G_{xx} = \frac{P_x^{calc}}{V_x|^{(0)}} + V_x|^{(0)} \cdot G_{xx}$$

(76)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} \cdot (-1) + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} \cdot (-1)]$$

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = -V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)}]$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)}]\}$$

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = P_x^{calc} - V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx}$$

(77)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)})$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = -2 \cdot V_x|^{(0)} \cdot B_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)})\}$$

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = -2 \cdot V_x|^{(0)} \cdot B_{xx} + \frac{Q_x^{calc} + V_x^2|^{(0)} \cdot B_{xx}}{V_x|^{(0)}} = -V_x|^{(0)} \cdot B_{xx} + \frac{Q_x^{calc}}{V_x|^{(0)}}$$

(78)

Por lo tanto, para determinar los elementos diagonales del jacobiano es necesario realizar divisiones entre los módulos de las tensiones. Para evitarlo, y para optimizar el algoritmo de cálculo, se multiplicarán todas las ecuaciones donde haya una división por el elemento del denominador, de manera que se obtiene un sistema de ecuaciones ligeramente modificado:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(0)} \\ \Delta Q_{PV+2}^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \cdots & \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_{PV+2} \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \cdots & V_n \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \cdots & \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_{PV+2} \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \cdots & V_n \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \\ \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \cdots & \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_{PV+2} \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \cdots & V_n \left. \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \cdots & \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_{PV+2} \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \cdots & V_n \left. \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_n} \right|^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \\ \frac{\Delta V_{PV+2}^{(1)}}{V_{PV+2}^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta V_n^{(1)}}{V_n^{(0)}} \end{pmatrix} \quad (79)$$

Se determinan los elementos del jacobiano:

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = V_x |^{(0)} \cdot V_k |^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} |^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} |^{(0)}]$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = V_x |^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k |^{(0)} \cdot [-G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} |^{(0)} + B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} |^{(0)}]\}$$

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = -Q_x^{calc} - V_x^2 |^{(0)} \cdot B_{xx}$$

(80)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$V_k \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_k} \right|^{(0)} = V_k |^{(0)} \cdot V_x |^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} |^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} |^{(0)})$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = P_x^{calc} + V_x^2 |^{(0)} \cdot G_{xx}$$

(81)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = -V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)}] \quad (82)$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = P_x^{calc} - V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx}$$

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$V_k \left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_k} \right|^{(0)} = V_k|^{(0)} \cdot V_x|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)}) \quad (83)$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \left. \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = -V_x^2|^{(0)} \cdot B_{xx} + Q_x^{calc}$$

Los nudos PQ generan dos ecuaciones o dos filas del jacobiano, correspondiendo con $\Delta P_x^{(0)}$ y $\Delta Q_x^{(0)}$. Los nudos PV sólo proporcionan una ecuación correspondiente a $\Delta P_x^{(0)}$.

$$\begin{pmatrix} \overline{\Delta P}^{(0)}|_{(n-1) \times 1} \\ \overline{\Delta Q}^{(0)}|_{(n_{PQ}) \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11}^{(0)}|_{(n-1) \times (n-1)} & J_{12}^{(0)}|_{(n-1) \times (n_{PQ})} \\ J_{21}^{(0)}|_{(n_{PQ}) \times (n-1)} & J_{22}^{(0)}|_{(n_{PQ}) \times (n_{PQ})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta \delta}^{(1)}|_{(n-1) \times 1} \\ \overline{\Delta V}^{(1)}|_{(n_{PQ}) \times 1} \end{pmatrix} \quad (84)$$

En conclusión, la estimación inicial se mejora o corrige de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \vec{\delta}^{(1)}|_{(n-1) \times 1} \\ \vec{V}^{(1)}|_{(n_{PQ}) \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\delta}^{(0)}|_{(n-1) \times 1} \\ \vec{V}^{(0)}|_{(n_{PQ}) \times 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{11}^{(0)}|_{(n-1) \times (n-1)} & J_{12}^{(0)}|_{(n-1) \times (n_{PQ})} \\ J_{21}^{(0)}|_{(n_{PQ}) \times (n-1)} & J_{22}^{(0)}|_{(n_{PQ}) \times (n_{PQ})} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\Delta P}^{(0)}|_{(n-1) \times 1} \\ \overline{\Delta Q}^{(0)}|_{(n_{PQ}) \times 1} \end{pmatrix} \quad (85)$$

4.4 Método de Newton Raphson desacoplado

Al igual que en el método de Newton-Raphson, se parte del cálculo de las potencias de nudo:

$$\begin{aligned} P_x^{calc} &= V_x^2 \cdot G_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk})\} \\ Q_x^{calc} &= -V_x^2 \cdot B_{xx} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk})\} \end{aligned} \quad (86)$$

A diferencia del método de Newton Raphson convencional, se establecen algunas hipótesis que simplifican el algoritmo de cálculo. En primer lugar, como las líneas de transmisión tienen un comportamiento marcadamente reactivo (la relación R/X es muy baja):

$$G_{xk} \ll B_{xk} \Rightarrow G_{xk} \approx 0 \Rightarrow \theta_{xk} \approx 90^\circ \quad (87)$$

Por otra parte, en condiciones normales de operación en estado estacionario los desfases entre argumentos de tensiones son pequeños (oscilan entre 5 y 10 grados):

$$\delta_x|^{(0)} - \delta_k|^{(0)} \approx 0 \Rightarrow \cos \delta_{xk} \approx 1, \quad \sin \delta_{xk} \approx 0 \quad (88)$$

Bajo las dos hipótesis anteriores:

$$\begin{aligned} V_k \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_k} \Big|^{(0)} &= V_k|^{(0)} \cdot V_x|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)}) \approx 0 \\ V_x \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_x} \Big|^{(0)} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk})\} + V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx} \approx 0 \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_k} \Big|^{(0)} &= -V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)}] \approx 0 \\ \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial \delta_x} \Big|^{(0)} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_x \cdot V_k \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk})\} - V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx} \approx 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Esto da lugar al “desacoplamiento” de las ecuaciones de flujo de cargas; es decir, el flujo de potencia activa se basará en los argumentos de las tensiones de nudo, mientras que el flujo de potencia reactiva se fundamentará en el módulo de las tensiones de nudo.

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(0)} \\ \Delta Q_{PV+2}^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \cdots & \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_n} \big|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \cdots & \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_n} \big|^{(0)} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} V_{PV+2} \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \big|^{(0)} & \cdots & V_n \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_n} \big|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{PV+2} \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \big|^{(0)} & \cdots & V_n \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_n} \big|^{(0)} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \\ \frac{\Delta V_{PV+2}^{(1)}}{V_{PV+2}^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta V_n^{(1)}}{V_n^{(0)}} \end{pmatrix} \quad (91)$$

Los elementos del jacobiano no nulos se determinan de la misma manera que en el método de Newton-Raphson convencional:

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_k} \bigg|^{(0)} = V_x \big|^{(0)} \cdot V_k \big|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} \big|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} \big|^{(0)}] \quad (92)$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_x} \bigg|^{(0)} = -Q_x^{calc} - V_x^2 \big|^{(0)} \cdot B_{xx}$$

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$V_k \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_k} \bigg|^{(0)} = V_k \big|^{(0)} \cdot V_x \big|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} \big|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} \big|^{(0)}) \quad (93)$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_x} \bigg|^{(0)} = -V_x^2 \big|^{(0)} \cdot B_{xx} + Q_x^{calc}$$

Consecuentemente se reduce el número de operaciones necesarias para la resolución del sistema de ecuaciones y también el tiempo de cálculo; todo ello a costa de una merma en la exactitud de los resultados que puede considerarse asumible.

$$\left(\vec{\delta}^{(1)} \big|_{(n-1) \times 1} \right) = \left(\vec{\delta}^{(0)} \big|_{(n-1) \times 1} \right) + \left(J_{11}^{(0)} \big|_{(n-1) \times (n-1)} \right)^{-1} \left(\overline{\Delta P}^{(0)} \big|_{(n-1) \times 1} \right) \quad (94)$$

$$\left(\frac{\vec{V}^{(1)}}{\vec{V}^{(0)}} \bigg|_{(n_{PQ}) \times 1} \right) = \left(\frac{\vec{V}^{(0)}}{\vec{V}^{(0)}} \bigg|_{(n_{PQ}) \times 1} \right) + \left(J_{22}^{(0)} \big|_{(n_{PQ}) \times (n_{PQ})} \right)^{-1} \left(\overline{\Delta Q}^{(0)} \big|_{(n_{PQ}) \times 1} \right) \quad (95)$$

4.5 Método de Newton-Raphson desacoplado rápido

Este método es equivalente al método de Newton-Raphson desacoplado, pero con la condición adicional de que la potencia reactiva inyectada en cualquier nudo es mucho menor que la potencia reactiva que fluiría si todas las ramas conectadas con dicho nudo fueran derivadas a tierra:

$$Q_x \ll |V_x|^2 \cdot B_{xx} \quad (96)$$

Para el primer bloque de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \cdots & \left. \frac{\partial P_2^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \cdots & \left. \frac{\partial P_n^{calc}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad (97)$$

A diferencia del método de Newton Raphson desacoplado, los elementos del jacobiano se determinan considerando las hipótesis de carácter reactivo de las líneas y de bajos desfases entre argumentos de tensiones (oscilan entre 5 y 10 grados):

$$G_{xk} \ll B_{xk} \Rightarrow G_{xk} \approx 0 \Rightarrow \theta_{xk} \approx 90^\circ \quad (98)$$

$$|\delta_x^{(0)} - \delta_k^{(0)}| \approx 0 \Rightarrow \cos \delta_{xk} \approx 1, \quad \sin \delta_{xk} \approx 0 \quad (99)$$

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} &= V_x^{(0)} \cdot V_k^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(0)}] \\ \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} &\approx V_x^{(0)} \cdot V_k^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot 0 - B_{xk} \cdot 1] \approx -V_x^{(0)} \cdot V_k^{(0)} \cdot B_{xk} \end{aligned} \quad (100)$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = -Q_x^{calc} - V_x^2 |^{(0)} \cdot B_{xx} \approx -V_x^2 |^{(0)} \cdot B_{xx}$$

En definitiva:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_2^{(0)} \cdot V_2^{(0)} \cdot B_{22} & \cdots & -V_2^{(0)} \cdot V_n^{(0)} \cdot B_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -V_2^{(0)} \cdot V_n^{(0)} \cdot B_{n2} & \cdots & -V_n^{(0)} \cdot V_n^{(0)} \cdot B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad (101)$$

Si se hace que los módulos de las tensiones de nudo sean 1 pu durante la evaluación del jacobiano:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2^{(0)} / V_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(0)} / V_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{22} & \cdots & -B_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_{n2} & \cdots & -B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad (102)$$

Para el segundo bloque de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_{PV+2}^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{PV+2} \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \Big|^{(0)} & \cdots & V_n \frac{\partial Q_{PV+2}^{calc}}{\partial V_n} \Big|^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{PV+2} \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_{PV+2}} \Big|^{(0)} & \cdots & V_n \frac{\partial Q_n^{calc}}{\partial V_n} \Big|^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta V_{PV+2}^{(1)}}{V_{PV+2}^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta V_n^{(1)}}{V_n^{(0)}} \end{pmatrix} \quad (103)$$

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\begin{aligned} V_k \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_k} \Big|^{(0)} &= V_k |^{(0)} \cdot V_x |^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} |^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} |^{(0)}) \\ V_k \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_k} \Big|^{(0)} &\approx V_k |^{(0)} \cdot V_x |^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot 0 - B_{xk} \cdot 1) \approx -V_k |^{(0)} \cdot V_x |^{(0)} \cdot B_{xk} \end{aligned} \quad (104)$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_x} \Big|^{(0)} = -V_x^2 |^{(0)} \cdot B_{xx} + Q_x^{calc} \approx -V_x^2 |^{(0)} \cdot B_{xx}$$

En definitiva:

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_{PV+2}^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_{PV+2}^{(0)} \cdot V_{PV+2}^{(0)} \cdot B_{PV+2,PV+2} & \cdots & -V_{PV+2}^{(0)} \cdot V_n^{(0)} \cdot B_{PV+2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -V_n^{(0)} \cdot V_{PV+2}^{(0)} \cdot B_{n,PV+2} & \cdots & -V_n^{(0)} \cdot V_n^{(0)} \cdot B_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta V_{PV+2}^{(1)}}{V_{PV+2}^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta V_n^{(1)}}{V_n^{(0)}} \end{pmatrix} \quad (105)$$

Si se hace que los módulos de las tensiones de nudo sean 1 pu durante la evaluación del jacobiano:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta Q_{PV+2}^{(0)}}{V_{PV+2}^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta Q_n^{(0)}}{V_n^{(0)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{PV+2,PV+2} & \cdots & -B_{PV+2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_{n,2} & \cdots & -B_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta V_{PV+2}^{(1)}}{V_{PV+2}^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta V_n^{(1)}}{V_n^{(0)}} \end{pmatrix} \quad (106)$$

4.6 Líneas

Habiendo determinado las tensiones de nudo, mediante Gauss-Seidel o Newton-Raphson, y conociendo la matriz de admitancias; es posible determinar los flujos de potencias.

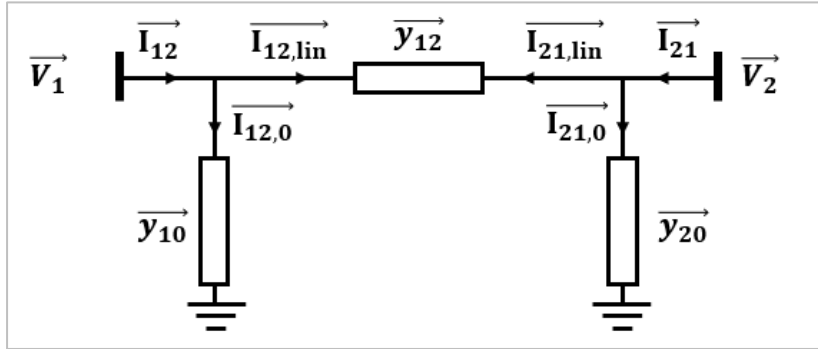


Figura 21. Esquema de una línea eléctrica.

Se determinan en primer lugar las corrientes de línea:

$$\overrightarrow{I_{12,lin}} = (\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}) \cdot \overrightarrow{y_{12}} \quad (107)$$

$$\overrightarrow{I_{21,lin}} = (\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}) \cdot \overrightarrow{y_{12}} \quad (108)$$

$$\overrightarrow{I_{12,0}} = (\overrightarrow{V_1}) \cdot \overrightarrow{y_{10}} \quad (109)$$

$$\overrightarrow{I_{21,0}} = (\overrightarrow{V_2}) \cdot \overrightarrow{y_{20}} \quad (110)$$

Conociendo tensiones de nudo y corrientes de línea, se determina el flujo de potencias:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_{12}} &= \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{I_{12}}^* = \overrightarrow{V_1} \cdot [(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}) \cdot \overrightarrow{y_{12}} + (\overrightarrow{V_1}) \cdot \overrightarrow{y_{10}}]^* \\ \overrightarrow{S_{12}} &= \overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2})^* \cdot \overrightarrow{y_{12}}^* + \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_1}^* \cdot \overrightarrow{y_{10}}^* \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_{21}} &= \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{I_{21}}^* = \overrightarrow{V_2} \cdot [(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}) \cdot \overrightarrow{y_{12}} + (\overrightarrow{V_2}) \cdot \overrightarrow{y_{20}}]^* \\ \overrightarrow{S_{21}} &= \overrightarrow{V_2} \cdot (\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})^* \cdot \overrightarrow{y_{12}}^* + \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_2}^* \cdot \overrightarrow{y_{20}}^* \end{aligned} \quad (112)$$

Finalmente se determinan las pérdidas de potencia en dicha línea:

$$\overrightarrow{S_{12,perd}} = \overrightarrow{S_{12}} + \overrightarrow{S_{21}} \quad (113)$$

5 FLUJO DE CARGA CONTINUADO

5.1 Estabilidad de tensión

El análisis del flujo de cargas ha demostrado que el estudio de Sistemas de Energía Eléctrica es tarea ardua y complicada; debido al gran número de elementos involucrados, y las relaciones no lineales entre los mismos. En este contexto, se deben considerar además las dificultades derivadas de las restricciones económicas y socio-ambientales para la expansión de la capacidad de generación y transmisión. Por ello, y debido al continuo crecimiento de la demanda energética, muchos sistemas eléctricos operan cada vez más cerca de sus límites (de carga, de estabilidad, de seguridad, de calidad, etc.). Llegados a este punto, es necesario definir qué se entiende como estabilidad.

La estabilidad de tensión se puede definir como la capacidad de un sistema eléctrico de mantener la tensión de sus nudos en niveles adecuados (aceptables), después de haber sufrido una perturbación de sus condiciones iniciales de operación. En este sentido se puede distinguir entre pequeñas perturbaciones, como la variación incremental de la carga y diversas acciones de control (de tensión o de frecuencia); y grandes perturbaciones, como cortocircuitos, desconexión de generadores o cortocircuitos de líneas de transmisión. La condición de estabilidad puede verse cumplida con la suficiente generación y transmisión de energía. En ambos casos, después de la ocurrencia de la perturbación es necesario que el sistema vuelva a funcionar de forma satisfactoria.

Sin embargo, cuando se trabaja con altas cargas o se modifica significativamente las condiciones de operación (con falta de refuerzo o apoyo de sistemas transmisión y de inversión en generación), se pueden superar los límites de generación y transmisión. En dicho caso el sistema entrará en condiciones de operación inestables, con el riesgo de alcanzar el colapso de tensión; que no es más que una caída progresiva e incontrolada de la tensión en algunos nudos del sistema. Las consecuencias son evidentes; desde operación de sistemas fuera de sus condiciones nominales o aumento de las pérdidas en las líneas, hasta cortocircuitos, desconexión de generadores, etc.

Si bien es cierto que la estabilidad de tensión es un fenómeno dinámico por naturaleza, aquí se adoptará un enfoque estático; es decir, se realizará un análisis a largo plazo (minutos, horas), ignorando los efectos transitorios que tengan lugar a corto plazo (segundos, minutos). Concretamente se adoptará el método de continuación o de flujo de potencia continuado. Este análisis se basa en ejecutar sucesivamente el flujo de cargas, modificando ligeramente las condiciones de carga del sistema (variación de la demanda y de la generación). De esta forma se obtienen los perfiles de tensión del sistema en función de la carga del mismo; más comúnmente conocidos como curvas PV, las cuales permiten comprender las diferentes condiciones de operación y de carga del sistema, además de obtener la tensión de colapso y el punto de carga máxima.

Para aclarar estos dos últimos conceptos, se describirá un simple sistema eléctrico (Figura 22). Sea un generador síncrono con una tensión constante V_1 a la salida, una línea de transmisión representada por su impedancia \vec{Z} , y la carga aparente compleja, expresada como suma de potencia activa y reactiva $\vec{S}_2 = P_2 + jQ_2$.

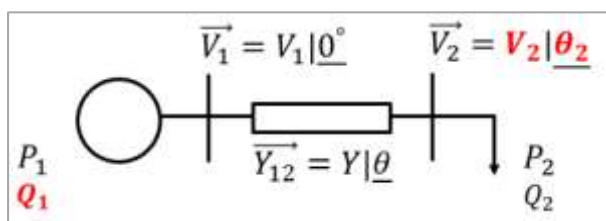


Figura 22. Esquema de un sistema generador – línea – carga.

A modo de recordatorio, las potencias generadas se consideran positivas, mientras que las potencias consumidas se consideran negativas. Por lo tanto, para el sistema de 2 nudos de la [Figura 22](#):

$$\begin{aligned}
 -P_2 - j \cdot Q_2 &= \vec{V}_2 \cdot (\vec{I})^* \\
 -P_2 + j \cdot Q_2 &= (\vec{V}_2)^* \cdot \vec{Y}_{12} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \\
 -P_2 + j \cdot Q_2 &= V_2 \cdot e^{-j\delta_2} \cdot Y \cdot e^{j\theta} \cdot (V_1 \cdot e^{j\delta_1} - V_2 \cdot e^{j\delta_2}) \\
 -P_2 + j \cdot Q_2 &= Y \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot e^{j(\theta+\delta_1-\delta_2)} - Y \cdot V_2^2 \cdot e^{j\theta}
 \end{aligned} \tag{114}$$

Descomponiendo en parte real e imaginaria, y reagrupando:

$$\begin{aligned}
 -P_2 &= Y \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\theta + \delta_1 - \delta_2) - Y \cdot V_2^2 \cdot \cos(\theta) \\
 Q_2 &= Y \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \sin(\theta + \delta_1 - \delta_2) - Y \cdot V_2^2 \cdot \sin(\theta) \\
 -P_2 + Y \cdot V_2^2 \cdot \cos(\theta) &= Y \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\theta + \delta_1 - \delta_2) \\
 Q_2 + Y \cdot V_2^2 \cdot \sin(\theta) &= Y \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \sin(\theta + \delta_1 - \delta_2)
 \end{aligned} \tag{115}$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$\begin{aligned}
 P_2^2 + Y^2 \cdot V_2^4 - 2 \cdot P_2 \cdot Y \cdot V_2^2 \cdot \cos \theta + Q_2^2 + 2 \cdot Q_2 \cdot Y \cdot V_2^2 \cdot \sin \theta &= Y^2 \cdot V_1^2 \cdot V_2^2 \\
 V_2^4 + \left\{ \frac{-2 \cdot P_2}{Y} \cos \theta + \frac{2 \cdot Q_2}{Y} \sin \theta - V_1^2 \right\} V_2^2 + \frac{P_2^2 + Q_2^2}{Y^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{116}$$

Reemplazando la potencia activa y reactiva por la potencia aparente y el factor de potencia:

$$\begin{aligned}
 V_2^4 + \left\{ \frac{-2 \cdot S_2 \cdot \cos \varphi_2}{Y} \cos \theta + \frac{2 \cdot S_2 \cdot \sin \varphi_2}{Y} \sin \theta - V_1^2 \right\} V_2^2 + \frac{S_2^2}{Y^2} &= 0 \\
 V_2^4 + \left\{ \frac{-2 \cdot S_2}{Y} \cos(\varphi_2 + \theta) - V_1^2 \right\} V_2^2 + \frac{S_2^2}{Y^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{117}$$

Resolviendo:

$$V_2^2 = \frac{\frac{2S_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \theta)}{Y} + V_1^2 \pm \sqrt{\left[\frac{2S_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \theta)}{Y} + V_1^2 \right]^2 - 4 \cdot \frac{S_2^2}{Y^2}}}{2} \tag{118}$$

Con base a este pequeño análisis eléctrico, se puede construir una familia de curvas para diferentes regímenes de carga ([Figura 23](#)), donde para cada curva se ha asumido un factor de potencia constante en la carga.

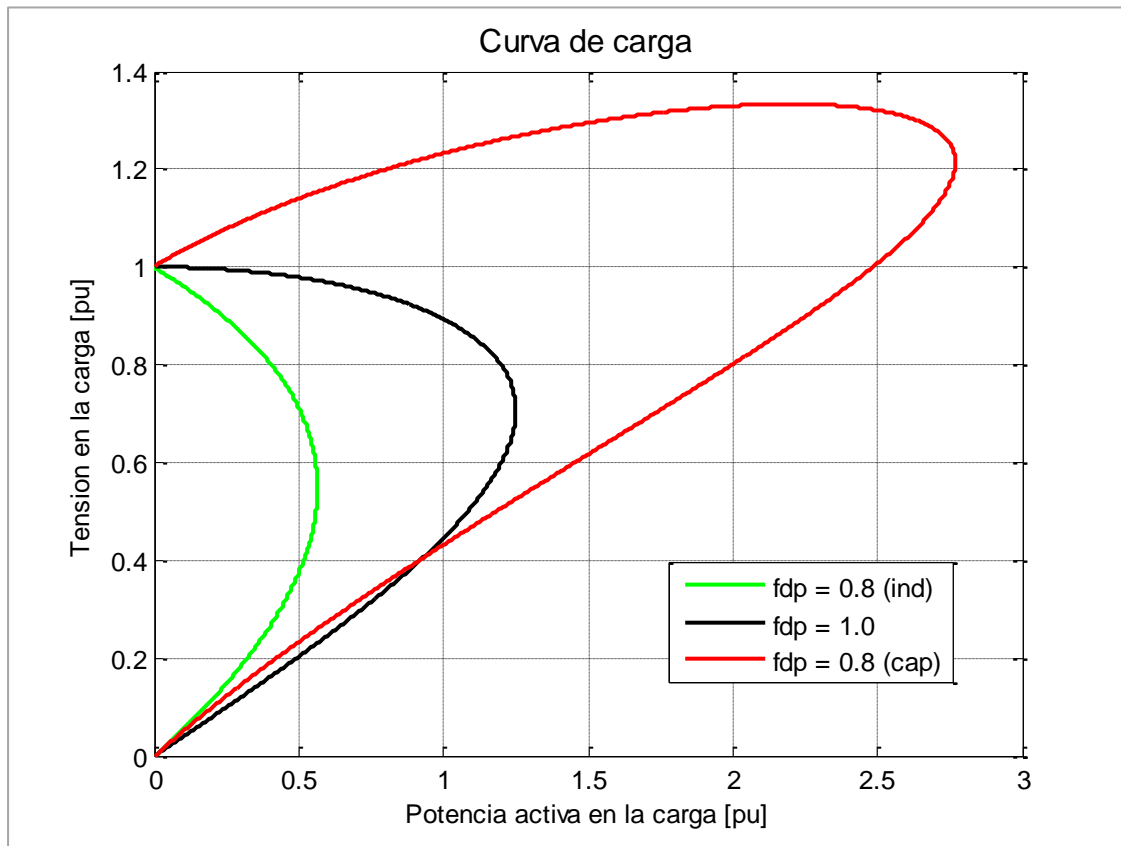


Figura 23. Curvas PV para el sistema de la figura 22 ($R=0.05$ pu; $X=0.2$ pu; $V1=1$ pu)

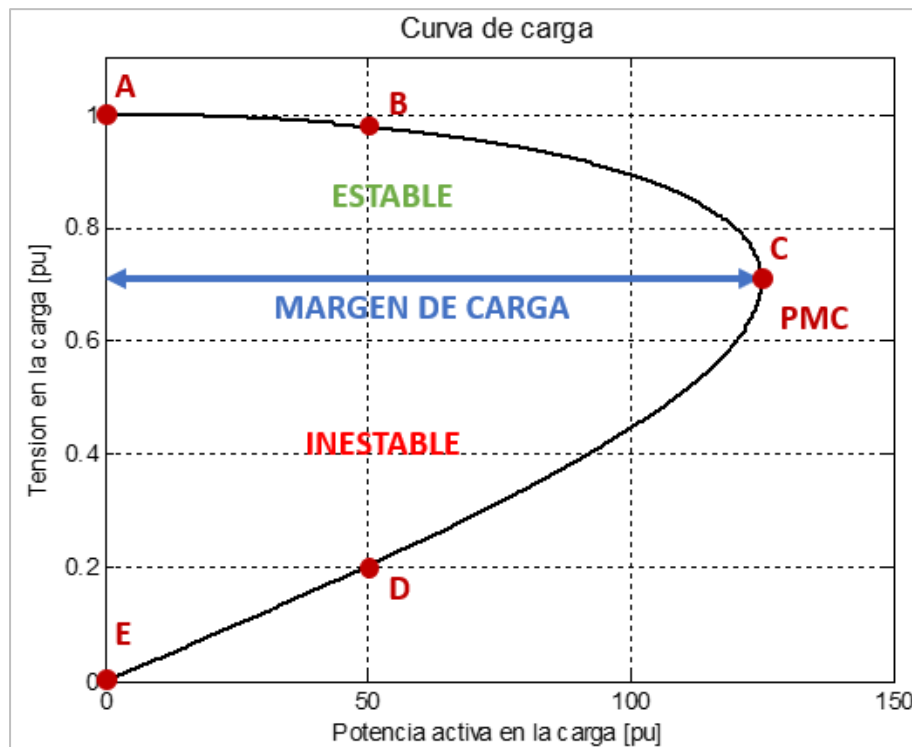


Figura 24. Ilustración de punto de máxima carga y límites de estabilidad.

En una curva PV genérica ([Figura 24](#)), se distinguen dos zonas de operación. Una primera zona estable desde **A** hasta **C**, donde la tensión disminuye conforme aumenta la potencia o carga. El punto **C** representa el punto de carga máxima o límite de estabilidad; la máxima carga que el sistema soporta sin perder estabilidad de la tensión. El punto de carga máxima define el límite entre las regiones de funcionamiento estables e inestables y se asocia con la singularidad de la matriz Jacobiana. Para cargas más grandes que la carga máxima, las ecuaciones de flujo de potencia no tienen solución, es decir, la generación y la red no son físicamente capaces de alimentar la carga especificada. Por lo tanto, las ecuaciones de flujo de energía son esenciales para el análisis estático de estabilidad de la tensión, puesto que definen el límite de la región de operación estable.

La parte inferior de la curva desde **C** hasta **E**, abarca las tensiones menores a la tensión de colapso (zonas con menor tensión y mayor corriente con respecto a la zona estable), y no tienen sentido práctico, ya que corresponden a puntos de funcionamiento inestables. Al incrementar la carga por encima del límite de estabilidad el sistema colapsaría.

Además, el flujo de potencia continuado también proporciona el margen de carga del sistema, es decir, la distancia en MW o MVA de un determinado punto de operación al Punto de Máxima Carga (PMC). El margen de estabilidad de la tensión, o margen de carga, es la distancia existente entre el punto de operación y el punto correspondiente a la carga máxima de la red. Esta distancia viene dada por parámetros tales como la potencia activa, reactiva o aparente. Representa el mayor aumento de consumo posible que mantiene el sistema operando en la región estable.

Por último, mencionar a título ilustrativo que conforme se compensa la potencia reactiva, aumentan tanto la tensión de colapso, alcanzando incluso los valores nominales, así como el PMC.

5.2 Proceso de predicción-corrección para una ecuación

Se describirá el método continuado para la siguiente ecuación:

$$f(x, \lambda) = x^2 - 5x + \lambda \quad (119)$$

Se define x como una variable eléctrica ficticia que mide la estabilidad del sistema, mientras que λ es el parámetro que cuantifica el incremento de carga sobre el sistema. Conforme se incrementa la carga del sistema (es decir, λ aumenta), el sistema evolucionará hacia un nuevo estado (en este caso disminuirá x). Llegará un momento en que el sistema no pueda absorber la carga adicional, llegando al colapso (es decir tanto λ como x disminuyen).

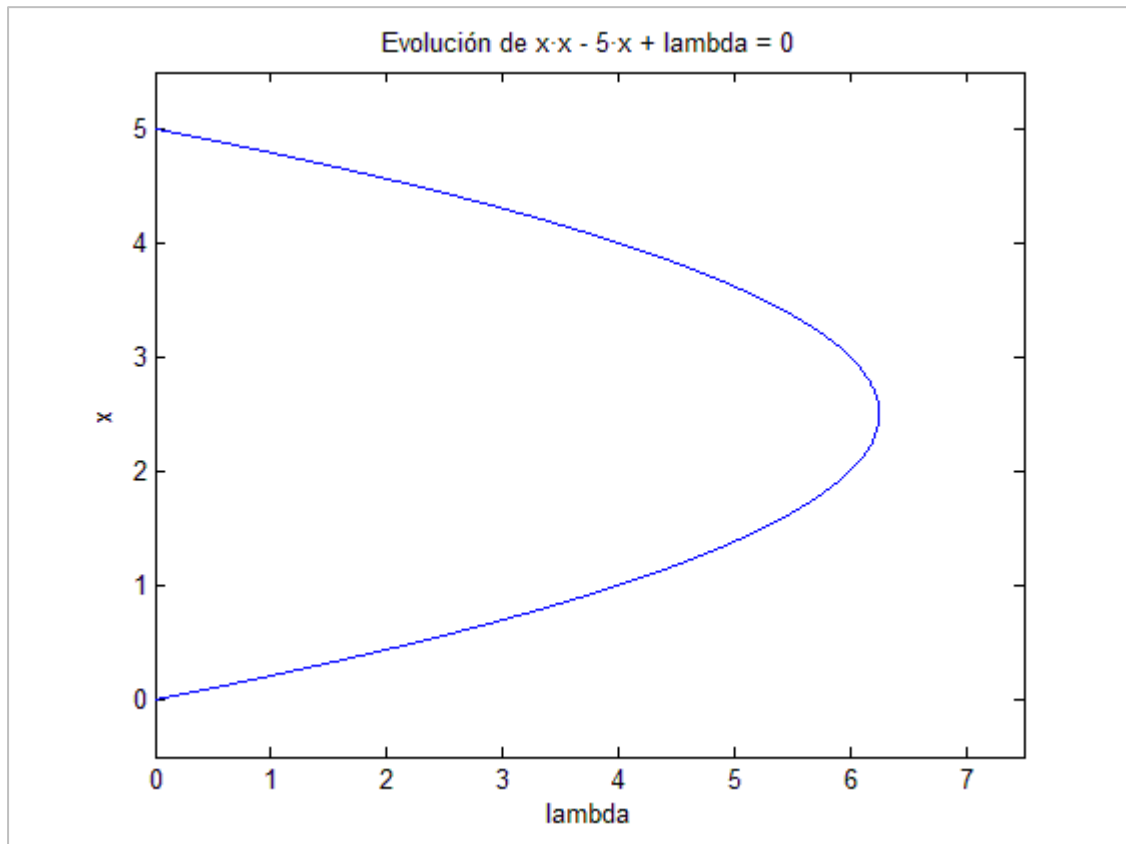


Figura 25. Gráfica de la función de estudio

Inicialmente se parte del caso base, una situación estable en la que no hay ningún incremento de carga ($\lambda_0 = 0$):

$$\begin{aligned} (x_0, \lambda_0) &= (5, 0) \\ f(x_0, \lambda_0) &= f(5, 0) = 5^2 - 5 \cdot 5 + 0 = 0 \end{aligned} \quad (120)$$

PREDICTOR

Aplicando el desarrollo de Taylor a la función $f(x, \lambda)$ entorno al punto inicial (x_0, λ_0) :

$$\begin{aligned} f(x_1, \lambda_1) &\approx f(x_0, \lambda_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, \lambda_0)} \cdot (x_1 - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{(x_0, \lambda_0)} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \\ 0 &\approx 0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, \lambda_0)} \cdot (x_1 - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{(x_0, \lambda_0)} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \\ [0] &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, \lambda_0)} & \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{(x_0, \lambda_0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_0 - 5) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (121)$$

Se tiene una ecuación con dos incógnitas, por lo que es necesario una ecuación adicional. La ecuación adicional vendrá dada por el módulo y sentido del vector tangente. Para ello se define el parámetro de continuación (especificado al final del proceso corrector), que será o bien x (fijando por lo tanto el valor de Δx) o bien λ (fijando en dicho caso el valor de $\Delta \lambda$). Denotando al parámetro de continuación como la k -ésima variable del vector de incógnitas:

$$\Delta x_k = \pm \sigma_k \quad (122)$$

Para fijar el paso de avance del vector tangente se emplea el vector \vec{e}_k , un vector fila con todos sus elementos ceros, excepto en la posición k , que toma el valor de 1. Por lo tanto, $\vec{e}_k = [0 \ 1]$ si se fija el valor de $\Delta \lambda$, o bien $\vec{e}_k = [1 \ 0]$ si se fija el valor de Δx :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \pm \sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_0 - 5) & 1 \\ \vec{e}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (123)$$

CORRECTOR

Aplicando el desarrollo de Taylor a la función $f(x, \lambda)$ en torno al punto inicial (x_1^*, λ_1^*) :

$$\begin{aligned} f(x_1, \lambda_1) &\approx f(x_1^*, \lambda_1^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1^*, \lambda_1^*)} \cdot (x_1 - x_1^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{(x_1^*, \lambda_1^*)} \cdot (\lambda_1 - \lambda_1^*) \approx 0 \\ [-f(x_1^*, \lambda_1^*)] &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1^*, \lambda_1^*)} & \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{(x_1^*, \lambda_1^*)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_1^* - 5) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (124)$$

Nuevamente se tiene una ecuación con dos incógnitas. La ecuación adicional viene dada de la fijación del parámetro de continuación empleado en la obtención del vector tangente; es decir, $x_k = x_k^* \Rightarrow \Delta x_k = 0$:

$$\begin{bmatrix} -f(x_1^*, \lambda_1^*) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1^*, \lambda_1^*)} & \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{(x_1^*, \lambda_1^*)} \\ \vec{e}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (125)$$

$$\begin{bmatrix} -(x_1^*)^2 + 5(x_1^*) - \lambda_1^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_1^* - 5) & 1 \\ \vec{e}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (126)$$

Este proceso corrector se realizará de forma iterativa mientras no se alcance la convergencia deseada.

PREDICTOR 1

Inicialmente se toma λ como parámetro de continuación ($k=2$), con signo positivo (puesto que la carga aumenta) y se define un paso $\sigma_\lambda = 1$. Se calcula el vector tangente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_0 - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 5 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (128)$$

Se obtiene el punto predictor:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ \lambda_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (129)$$

CORRECTOR 1

Se trata de determinar el punto corregido (x_1, λ_1) partiendo del punto estimado (x_1^*, λ_1^*) . Para ello se fija el valor de la componente k de (x_1, λ_1) ; es decir, como $k=2$, $\lambda_1 = \lambda_1^*$:

$$\begin{bmatrix} -(x_1^*)^2 + 5 \cdot x_1^* - \lambda_1^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_1^* - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (130)$$

$$\begin{bmatrix} -4.8^2 + 5 \cdot 4.8 - 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 4.8 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0087 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (131)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0087 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7913 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (132)$$

Asumiendo un error relativo admisible de 0.001 ($0.0087 > 0.001$), será necesario repetir el proceso corrector a partir del último resultado obtenido:

$$\begin{bmatrix} -4.7913^2 + 5 \cdot 4.7913 - 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 4.7913 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000165 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (133)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7913 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0000165 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7913165 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (134)$$

PREDICTOR 2

Como parámetro de continuación se toma aquella variable que mayor variación sufra:

$$\begin{bmatrix} (x_1 - x_0)/x_0 \\ (\lambda_1 - \lambda_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4.7913 - 5)/5 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0417 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (135)$$

En este caso el parámetro de continuación será λ ($k=2$). Como λ está aumentando, se tomará $+\sigma_\lambda = +1$ para determinar el vector tangente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_1 - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (136)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 4.7913 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5826 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2182 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (137)$$

Se calcula el punto predictor:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7913 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2182 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5731 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (138)$$

CORRECTOR 2

Se trata de determinar el punto corregido (x_2, λ_2) partiendo del punto estimado (x_2^*, λ_2^*) . Para ello se fija el valor de la componente k de (x_2, λ_2) ; es decir, como $k=2$, $\lambda_2 = \lambda_2^*$:

$$\begin{bmatrix} -(x_2^*)^2 + 5 \cdot x_2^* - \lambda_2^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_2^* - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$\begin{bmatrix} -4.5731^2 + 5 \cdot 4.5731 - 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 4.5731 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0115 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5731 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0115 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5616 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (141)$$

Asumiendo un error relativo admisible de 0.001 ($0.0115 > 0.001$), será necesario repetir el proceso corrector a partir del último resultado obtenido:

$$\begin{bmatrix} -4.5616^2 + 5 \cdot 4.5616 - 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 4.5616 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00003199 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5616 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.00003199 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.56157 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (143)$$

Repitiendo el proceso predictor-corrector durante varias etapas:

Tabla 4. Proceso de predicción y corrección

	Parámetro de continuación	PREDICTOR		CORRECTOR	
		lambda	x	lambda	x
0	lambda	0	5	0	5
1	lambda	1	4.8	1	4.7913
2	lambda	2	4.5731	2	4.5616
3	lambda	3	4.3190	3	4.3028
4	lambda	4	4.0254	4	4
5	lambda	5	3.6667	5	3.6180
6	lambda	6	3.1708	6	3

PREDICTOR 7

Como parámetro de continuación se toma aquella variable que mayor variación sufra:

$$\begin{bmatrix} (x_6 - x_5)/x_5 \\ (\lambda_6 - \lambda_5)/\lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 - 3.618)/3.618 \\ (6 - 5)/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1708 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (144)$$

En este caso el parámetro de continuación será λ ($k=2$). Como λ está aumentando, se tomará $+\sigma_\lambda = +1$ para determinar el vector tangente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_6 - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 3 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (146)$$

Se obtiene el punto predictor:

$$\begin{bmatrix} x_7^* \\ \lambda_7^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (147)$$

CORRECTOR 7

Se trata de determinar el punto corregido (x_7, λ_7) partiendo del punto estimado (x_7^*, λ_7^*) . Para ello se fija el valor de la componente k de (x_7, λ_7) ; es decir, como $k=2$, $\lambda_7 = \lambda_7^*$:

$$\begin{bmatrix} -(x_7^*)^2 + 5 \cdot x_7^* - \lambda_7^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_7^* - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$\begin{bmatrix} -2^2 + 5 \cdot 2 - 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (150)$$

Asumiendo un error relativo admisible de 0.001 ($1 > 0.001$), será necesario repetir el proceso corrector a partir del último resultado obtenido:

$$\begin{bmatrix} -3^2 + 5 \cdot 3 - 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 3 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (151)$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (152)$$

Se observa que se vuelve a obtener el mismo valor obtenido en el predictor. Por lo tanto, se entrará en un bucle de cálculo en el que no se obtendrá la convergencia. Para solventar este problema se modifica el paso de cálculo del vector tangente.

Repitiendo el proceso predictor-corrector para $\sigma_\lambda = \{1, 0.5, 0.25\}$ tampoco se alcanza la convergencia. Tomando $\sigma_\lambda = 0.125$ sí se alcanza la convergencia.

PREDICTOR 7 (modificado)

Se redefine el vector tangente tomando como parámetro de continuación λ ($k=2$), que está aumentando, con $+\sigma_\lambda = +0.125$ para determinar el vector tangente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_6 - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (153)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ +0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 3 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.125 \\ 0.125 \end{bmatrix} \quad (154)$$

Se obtiene el punto predictor:

$$\begin{bmatrix} x_7^* \\ \lambda_7^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.125 \\ 0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.875 \\ 6.125 \end{bmatrix} \quad (155)$$

CORRECTOR 7 (modificado)

Se trata de determinar el punto corregido (x_7, λ_7) partiendo del punto estimado (x_7^*, λ_7^*) . Para ello se fija el valor de la componente k de (x_7, λ_7) ; es decir, como $k=2$, $\lambda_7 = \lambda_7^*$:

$$\begin{bmatrix} -(x_7^*)^2 + 5 \cdot x_7^* - \lambda_7^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_7^* - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (156)$$

$$\begin{bmatrix} -2.875^2 + 5 \cdot 2.875 - 6.125 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2.875 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0208 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (157)$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.875 \\ 6.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0208 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8542 \\ 6.125 \end{bmatrix} \quad (158)$$

Asumiendo un error relativo admisible de 0.001 ($0.0208 > 0.001$), será necesario repetir el proceso corrector a partir del último resultado obtenido:

$$\begin{bmatrix} -2.854^2 + 5 \cdot 2.854 - 6.125 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2.854 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0006127 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (159)$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8542 \\ 6.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0006127 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8536 \\ 6.125 \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$\begin{bmatrix} -2.854^2 + 5 \cdot 2.854 - 6.125 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2.854 - 5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.31 \cdot 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8536 \\ 6.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0000005310 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8536005 \\ 6.125 \end{bmatrix} \quad (162)$$

PREDICTOR 8

Como parámetro de continuación se toma aquella variable que mayor variación sufra:

$$\begin{bmatrix} (x_7 - x_6)/x_6 \\ (\lambda_7 - \lambda_6)/\lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2.8536 - 3)/3 \\ (6.125 - 6)/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0488 \\ 0.0208 \end{bmatrix} \quad (163)$$

En este caso el parámetro de continuación será x ($k=1$). Como x está disminuyendo, se tomará $-\sigma_x = -0.5$ para determinar el vector tangente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_7 - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (164)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2.8536 - 5) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7072 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.3536 \end{bmatrix} \quad (165)$$

Se calcula el punto predictor:

$$\begin{bmatrix} x_8^* \\ \lambda_8^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_7 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8536 \\ 6.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.3536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3536 \\ 6.4786 \end{bmatrix} \quad (166)$$

CORRECTOR 8

Se trata de determinar el punto corregido (x_8, λ_8) partiendo del punto estimado (x_8^*, λ_8^*) . Para ello se fija el valor de la componente k de (x_8, λ_8) ; es decir, como $k=1$, $x_8 = x_8^*$:

$$\begin{bmatrix} -(x_8^*)^2 + 5 \cdot x_8^* - \lambda_8^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot x_8^* - 5) & 1 \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (167)$$

$$\begin{bmatrix} -2.3536^2 + 5 \cdot 2.3536 - 6.4786 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2.3536 - 5) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix} \quad (168)$$

$$\begin{bmatrix} x_8 \\ \lambda_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3536 \\ 6.4786 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3536 \\ 6.2286 \end{bmatrix} \quad (169)$$

Asumiendo un error relativo admisible de 0.001 ($0.25 > 0.001$), será necesario repetir el proceso corrector a partir del último resultado obtenido:

$$\begin{bmatrix} -2.3536^2 + 5 \cdot 2.3536 - 6.2286 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 2.3536 - 5) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (170)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3536 \\ 6.2286 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3536 \\ 6.2286 \end{bmatrix} \quad (171)$$

Finalmente se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 5. Resultados del método de continuación para una ecuación

	Parámetro de continuación	PREDICTOR		CORRECTOR	
		lambda	x	lambda	x
0	lambda	0	5	0	5
1	lambda	1	4.8	1	4.7913
2	lambda	2	4.5731	2	4.5616
3	lambda	3	4.3190	3	4.3028
4	lambda	4	4.0254	4	4
5	lambda	5	3.6667	5	3.6180
6	lambda	6	3.1708	6	3
7	lambda	6.1250	2.8750	6.1250	2.8536
8	x	6.4786	2.3536	6.2286	2.3536
9	x	6.0821	1.8536	5.8321	1.8536
10	x	5.1857	1.3536	4.9357	1.3536
11	x	3.7892	0.8536	3.5392	0.8536
12	x	1.8928	0.3536	1.6428	0.3536
13	x	-0.5037	-0.1464	-0.7537	-0.1464

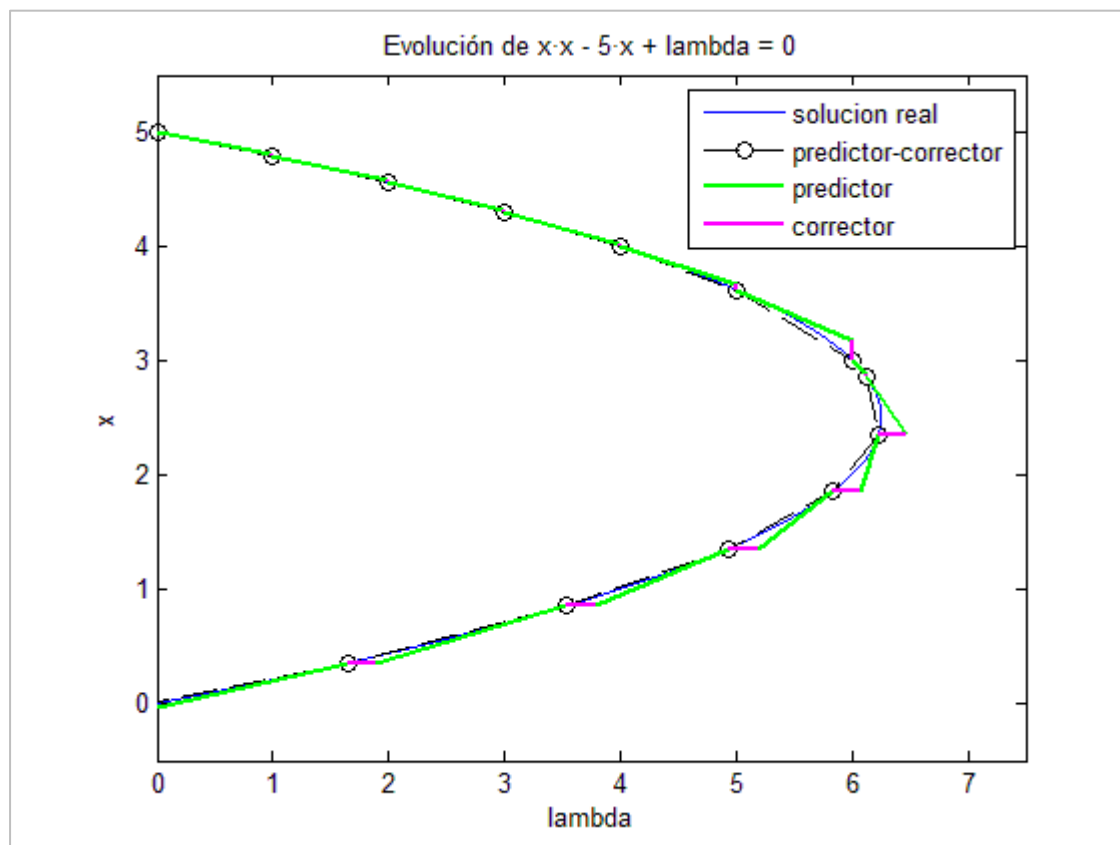


Figura 26 . Método de continuación para una ecuación

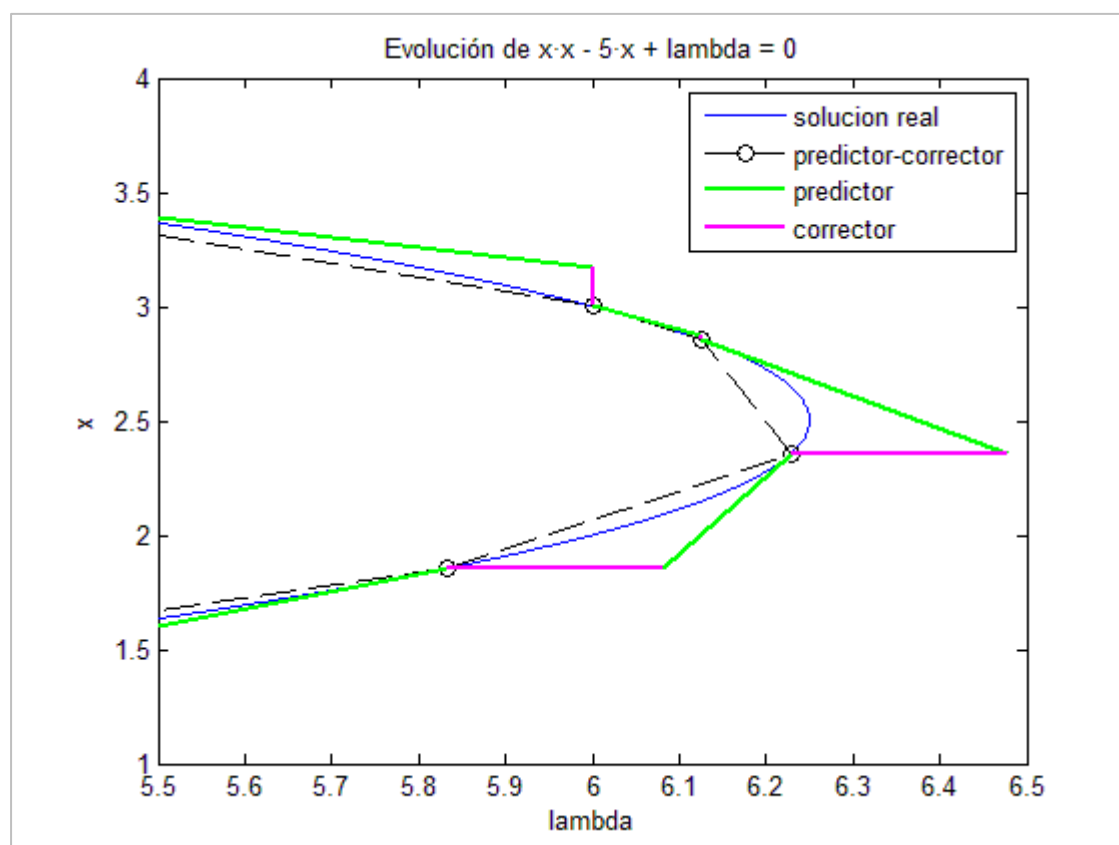


Figura 27. Detalle del método de continuación para una ecuación

5.3 Para sistemas de potencia

Como ya se ha mencionado anteriormente, el método de flujo continuado se emplea para hacer un análisis estático de estabilidad. Este análisis consiste en incrementar gradualmente la carga y la generación del sistema (manteniendo el factor de potencia constante). Con ello se puede determinar los perfiles de tensión en las cargas con respecto al aumento de carga experimentada por dichos nudos.

Para los nudos PV y PQ la potencia activa vendrá determinada por la diferencia entre la potencia activa generada y la potencia activa consumida (ambas conocidas). Análogamente, para los nudos PQ la potencia reactiva será la diferencia entre la potencia reactiva generada y la potencia reactiva consumida (ambas conocidas). Tomando un nudo genérico x como nudo PQ, se obtendrán las potencias de nudo impuestas en la red:

$$\begin{aligned} P_x^{red} &= P_x^{gen} - P_x^{load} \\ Q_x^{red} &= Q_x^{gen} - Q_x^{load} \end{aligned} \quad (172)$$

Por otra parte, conociendo las tensiones de nudo, se pueden calcular las potencias de nudo. Para el flujo de carga convencional se tenía que:

$$\begin{aligned} P_x^{calc(i)} &= V_x^{2(i)} \cdot G_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)})] \\ Q_x^{calc(i)} &= -V_x^{2(i)} \cdot B_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)})] \end{aligned} \quad (173)$$

Por lo tanto, la potencia de nudo especificada por las condiciones de operación de la red debe ser igual a la potencia de nudo calculada a partir del estado eléctrico de la misma:

$$\begin{aligned} P_x^{calc(i)} - P_x^{red} &= 0 \\ V_x^{2(i)} \cdot G_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)})] - P_x^{red} &= 0 \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} Q_x^{calc(i)} - Q_x^{red} &= 0 \\ -V_x^{2(i)} \cdot B_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)})] - Q_x^{red} &= 0 \end{aligned} \quad (175)$$

El flujo de carga continuado consiste en incrementar la carga a través de un parámetro λ y unos coeficientes $k_x^{(i)}$ de manera que cada nudo tenga su propia alteración de carga, independientemente de lo que ocurra en los demás nudos:

$$P_x^{load(i)} = P_x^{load} + \Delta P_x^{load(i)} = P_x^{load} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{load} \quad (176)$$

$$Q_x^{load(i)} = Q_x^{load} + \Delta Q_x^{load(i)} = Q_x^{load} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{load}$$

De esta manera, si $k_x^{(i)}$ es cero, la carga no se altera; mientras que si es un número positivo, la carga se incrementa; y si se trata de un número negativo, la carga se reduce.

Al igual que se aumenta la carga, también se puede aumentar la potencia generada:

$$\begin{aligned} P_x^{gen(i)} &= P_x^{gen} + \Delta P_x^{gen(i)} = P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{gen} \\ Q_x^{gen(i)} &= Q_x^{gen} + \Delta Q_x^{gen(i)} = Q_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{gen} \end{aligned} \quad (177)$$

Se redistribuye la potencia activa generada, de manera que se incremente la potencia en todos los nudos de forma proporcional a la capacidad de generación de los mismos:

$$\begin{aligned} P_x^{gen(i)} &= P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{gen} = P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot k_x^{gen(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{gen} \\ k_x^{gen(i)} &= \frac{P_x^{gen(i)}}{P_x^{gen(i)}} \end{aligned} \quad (178)$$

Redefiniendo las potencias de red de los nudos PV y PQ se llega a:

$$\begin{aligned} P_x^{red(i)} &= P_x^{gen(i)} - P_x^{load(i)} \\ P_x^{red(i)} &= P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot k_x^{gen(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{gen} - P_x^{load} - k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{load} \end{aligned} \quad (179)$$

$$\begin{aligned} Q_x^{red(i)} &= Q_x^{gen(i)} - Q_x^{load(i)} \\ Q_x^{red(i)} &= Q_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{gen} - Q_x^{load} - k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{load} \end{aligned} \quad (180)$$

Por lo tanto, ya se ha obtenido el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} f_{P,x}^{(i)} &= P_x^{calc(i)} - P_x^{red(i)} = 0 \\ f_{Q,x}^{(i)} &= Q_x^{calc(i)} - Q_x^{red(i)} = 0 \end{aligned} \quad (181)$$

Para el caso de nudos PV y PQ:

$$\begin{aligned} f_{P,x}^{(i)} &= \left\{ V_x^{2(i)} \cdot G_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)})] \right\} - \\ &- \{ P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot k_x^{gen(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{gen} - P_x^{load} - k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{load} \} = 0 \end{aligned} \quad (182)$$

Para nudos PQ:

$$f_{Q,x}^{(i)} = \left\{ -V_x^{2(i)} \cdot B_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)})] \right\} - \quad (183)$$

$$-\{Q_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{gen} - Q_x^{load} - k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{load}\} = 0$$

Aplicando el desarrollo de Taylor a las funciones $f_{P,x}$ y $f_{Q,x}$:

$$f_{P,x}|^{(1)} = f_{P,x}|^{(0)} + \left[\frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_1} \right]^{(0)} \Delta \delta_1^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial f_{P,x}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)} + \left[\frac{\partial f_{P,x}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \Delta \lambda^{(1)} \quad (184)$$

$$f_{Q,x}|^{(1)} = f_{Q,x}|^{(0)} + \left[\frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_1} \right]^{(0)} \Delta \delta_1^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial f_{Q,x}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)} + \left[\frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \Delta \lambda^{(1)}$$

Por lo tanto:

$$f_{P,x}|^{(1)} - f_{P,x}|^{(0)} = \left[\frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_1} \right]^{(0)} \Delta \delta_1^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial f_{P,x}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)} + \left[\frac{\partial f_{P,x}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \Delta \lambda^{(1)} \quad (185)$$

$$f_{Q,x}|^{(1)} - f_{Q,x}|^{(0)} = \left[\frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_1} \right]^{(0)} \Delta \delta_1^{(1)} + \dots + \left[\frac{\partial f_{Q,x}}{\partial V_n} \right]^{(0)} \Delta V_n^{(1)} + \left[\frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \Delta \lambda^{(1)}$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \Delta f_{P,2}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta f_{P,n}^{(1)} \\ \Delta f_{Q,PV+2}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta f_{Q,n}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_{PV+2}} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_{PV+2}} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{P,n}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \\ \left[\frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial V_{PV+2}} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial V_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_2} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_{PV+2}} \right]^{(0)} & \dots & \left[\frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_n} \right]^{(0)} & \left[\frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \lambda} \right]^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \\ \Delta V_{PV+2}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta V_n^{(1)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (186)$$

5.3.1 Parámetro de continuación

Se parte del conocimiento de un estado eléctrico del sistema $\vec{x}^{(1)}$ en el cual se conocen las tensiones de todos los nudos (tanto en módulo como en argumento). Éstas pueden provenir de la resolución del flujo de carga convencional, o del proceso de predicción-corrección del flujo de carga continuado:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(1)} \\ \delta_3^{(1)} \\ \dots \\ \delta_n^{(1)} \\ V_{PV+2}^{(1)} \\ V_{PV+3}^{(1)} \\ \dots \\ V_n^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (187)$$

El parámetro de carga $\lambda^{(1)}$ se inicializa a cero, correspondiendo al caso base en el que no se han alterado las potencias de red.

Para predecir un nuevo estado eléctrico $\vec{x}^{(2,pred)}$ se define el parámetro de continuación k. Dicho parámetro puede ser cualquiera de las variables eléctricas (módulo de la tensión, argumento de la tensión, parámetro de carga), y se determina comparando dos estados eléctricos consecutivos:

$$k = \text{posicion de max} \left\{ \left| \frac{\delta_2^{(1)} - \delta_2^{(0)}}{\delta_2^{(0)}} \right|, \dots, \left| \frac{V_{PV+2}^{(1)} - V_{PV+2}^{(0)}}{V_{PV+2}^{(0)}} \right|, \dots, \left| \frac{\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)}} \right| \right\} \quad (188)$$

Como inicialmente se parte de un único estado eléctrico, no es posible realizar una comparación; por lo que se tomará λ como parámetro de continuación.

Una vez escogido el parámetro de continuación, se fija su valor:

$$x_k = \pm \sigma_k \quad (189)$$

Por ejemplo, si el parámetro de continuación es λ , se puede tomar un paso de 0.1; mientras que, si se trata del módulo de una tensión, se puede tomar un paso de 0.05. El signo vendrá determinado por la variación de la variable k; si $x_k^{(1)} > x_k^{(0)}$, el signo será positivo; en caso contrario el signo será negativo. Para el caso de partida, λ como parámetro de continuación, se tomará un signo positivo (puesto que la carga está aumentando).

5.3.2 Predictor

Tras escoger el parámetro de continuación, y conociendo un estado eléctrico $\vec{x}^{(1)}$, se procederá a predecir un nuevo estado eléctrico $\vec{x}^{(2,pred)}$. Para ello, se deberá resolver el siguiente sistema de ecuaciones bajo una serie de condiciones:

$$\begin{pmatrix} \Delta f_{P,2}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta f_{P,n}^{(1)} \\ \Delta f_{Q,PV+2}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta f_{Q,n}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \\ \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_{PV+2}} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \\ \Delta V_{PV+2}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta V_n^{(1)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (190)$$

El proceso de predicción consiste en avanzar en la dirección tangente marcada por el parámetro de continuación (variable k):

$$\Delta x_k^{(1)} = \pm \sigma_k \quad (191)$$

En el proceso de corrección el flujo de potencias no se ve alterado:

$$\Delta f_{P,i}^{(1)} = \Delta f_{Q,j}^{(1)} = 0 \quad \forall i, j \neq k \quad (192)$$

Por lo tanto, empleando el vector e_k , un vector fila con todos sus elementos ceros, excepto en la posición k, que toma el valor de 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm \sigma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_m \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_m} \right|^{(0)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_m \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_m} \right|^{(0)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \\ \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_m \left. \frac{\partial f_{Q,m}}{\partial V_m} \right|^{(0)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{Q,m}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{Q,m}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_2} \right|^{(0)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_n} \right|^{(0)} & V_m \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_m} \right|^{(0)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_n} \right|^{(0)} & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \lambda} \right|^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(1)} \\ \Delta V_m^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta V_n^{(1)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (193)$$

e_k

Se determinan los elementos del jacobiano:

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [-G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} (-1) + B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} (-1)]$$

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)}]$$

(194)

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(0)} \cdot [-G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)}]\}$$

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = -Q_x^{calc}|^{(0)} - V_x^2|^{(0)} \cdot B_{xx}$$

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$V_k \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_k} \right|^{(0)} = V_k|^{(0)} \cdot V_x|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)})$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = 2 \cdot V_x^2|^{(0)} G_{xx} + V_x|^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)})]$$

$$V_x \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(0)} = P_x^{calc}|^{(0)} + V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx}$$

(195)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} (-1) + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)} (-1)]$$

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(0)} = -V_x|^{(0)} \cdot V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)}]$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = V_x|^{(0)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k|^{(0)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(0)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(0)}]]$$

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(0)} = P_x^{calc}|^{(0)} - V_x^2|^{(0)} \cdot G_{xx}$$

(196)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$V_k \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial V_k} \Big|^{(0)} = V_k \Big|^{(0)} \cdot V_x \Big|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} \Big|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} \Big|^{(0)})$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial V_x} \Big|^{(0)} = -2V_x^2 \Big|^{(0)} B_{xx} + V_x \Big|^{(0)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} V_k \Big|^{(0)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk} \Big|^{(0)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk} \Big|^{(0)}) \quad (197)$$

$$V_x \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_x} \Big|^{(0)} = -V_x^2 \Big|^{(0)} \cdot B_{xx} + Q_x^{calc} \Big|^{(0)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \lambda} \Big|^{(0)} &= -k_x^{(i)} \cdot k_x^{gen(i)} \cdot P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot P_x^{load} = k_x^{(i)} \cdot [P_x^{load} - k_x^{gen(i)} \cdot P_x^{gen}] \\ \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \lambda} \Big|^{(0)} &= -k_x^{(i)} \cdot Q_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot Q_x^{load} = k_x^{(i)} \cdot [Q_x^{load} - Q_x^{gen}] \end{aligned} \quad (198)$$

Los nudos PQ generan dos ecuaciones o dos filas del jacobiano, correspondiendo con las potencias activa y reactiva de dicho nudo. Los nudos PV sólo proporcionan una ecuación, proveniente de la potencia activa.

$$\begin{pmatrix} \vec{0} \Big|_{(n-1)} \\ \vec{0} \Big|_{n_{PQ}} \\ \pm \sigma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11}^{(0)} \Big|_{(n-1) \times (n-1)} & J_{12}^{(0)} \Big|_{(n-1) \times (n_{PQ})} & J_{\lambda}^{(0)} \Big|_{(n_{PQ}+n-1) \times 1} \\ J_{21}^{(0)} \Big|_{(n_{PQ}) \times (n-1)} & J_{22}^{(0)} \Big|_{(n_{PQ}) \times (n_{PQ})} & \\ e_k \Big|_{1 \times (n+n_{PQ}-1)} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta \delta}^{(0)} \Big|_{(n-1)} \\ \overline{\Delta \vec{V}}^{(0)} \Big|_{n_{PQ}} \\ \Delta \lambda^{(0)} \end{pmatrix} \quad (199)$$

En conclusión, la estimación inicial se mejora o corrige de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \vec{\delta}^{(1)} \Big|_{(n-1)} \\ \vec{V}^{(1)} \Big|_{(n_{PQ})} \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\delta}^{(0)} \Big|_{(n-1)} \\ \vec{V}^{(0)} \Big|_{(n_{PQ})} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{11}^{(0)} \Big|_{(n-1) \times (n-1)} & J_{12}^{(0)} \Big|_{(n-1) \times (n_{PQ})} & J_{\lambda}^{(0)} \Big|_{(n_{PQ}+n-1) \times 1} \\ J_{21}^{(0)} \Big|_{(n_{PQ}) \times (n-1)} & J_{22}^{(0)} \Big|_{(n_{PQ}) \times (n_{PQ})} & \\ e_k \Big|_{1 \times (n+n_{PQ}-1)} & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{0} \Big|_{(n-1)} \\ \vec{0} \Big|_{(n_{PQ})} \\ \pm \sigma_k \end{pmatrix} \quad (200)$$

5.3.3 Corrector

El punto de partida es el vector estado eléctrico obtenido en el proceso de predicción $\vec{x}^{(1)}$. Para obtener una nueva solución $\vec{x}^{(2)}$ se resolverá el método de Newton Raphson, pero manteniendo fijo el valor del parámetro de continuación, previamente determinado en el proceso de corrección:

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} \Rightarrow \Delta x_k = 0 \quad (201)$$

Por lo tanto, se deberá resolver de forma iterativa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -f_{P,2}^{(1)} \\ \vdots \\ -f_{P,n}^{(1)} \\ -f_{Q,PV+2}^{(1)} \\ \vdots \\ -f_{Q,n}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} \right|^{(1)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_n} \right|^{(1)} & V_m \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_m} \right|^{(1)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_n} \right|^{(1)} & \left. \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \right|^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_2} \right|^{(1)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \delta_n} \right|^{(1)} & V_m \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_m} \right|^{(1)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial V_n} \right|^{(1)} & \left. \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \lambda} \right|^{(1)} \\ \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_2} \right|^{(1)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,PV+2}}{\partial \delta_n} \right|^{(1)} & V_m \left. \frac{\partial f_{Q,m}}{\partial V_m} \right|^{(1)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{Q,m}}{\partial V_n} \right|^{(1)} & \left. \frac{\partial f_{Q,m}}{\partial \lambda} \right|^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_2} \right|^{(1)} & \dots & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \delta_n} \right|^{(1)} & V_m \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_m} \right|^{(1)} & \dots & V_n \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial V_n} \right|^{(1)} & \left. \frac{\partial f_{Q,n}}{\partial \lambda} \right|^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(2)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(2)} \\ \frac{\Delta V_m^{(2)}}{V_m^{(1)}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta V_n^{(2)}}{V_n^{(1)}} \\ \Delta \lambda^{(2)} \end{pmatrix} \quad (202)$$

Para el caso de nudos PV y PQ:

$$f_{P,x}^{(i)} = \left\{ V_x^{2(i)} \cdot G_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)})] \right\} - \quad (203)$$

$$- \{ P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot k_x^{gen(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{gen} - P_x^{load} - k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot P_x^{load} \} = 0$$

Para nudos PQ:

$$f_{Q,x}^{(i)} = \left\{ -V_x^{2(i)} \cdot B_{xx} + V_x^{(i)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k^{(i)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}^{(i)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}^{(i)})] \right\} - \quad (204)$$

$$- \{ Q_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{gen} - Q_x^{load} - k_x^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} \cdot Q_x^{load} \} = 0$$

Se determinan los elementos del jacobiano:

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(1)} = V_x|^{(1)} \cdot V_k|^{(1)} \cdot [-G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)} (-1) + B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)} (-1)]$$

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(1)} = V_x|^{(1)} \cdot V_k|^{(1)} \cdot [G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)}]$$

(205)

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(1)} = V_x|^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} \{V_k|^{(1)} \cdot [-G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)} + B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)}]\}$$

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(1)} = -Q_x^{calc}|^{(1)} - V_x^2|^{(1)} \cdot B_{xx}$$

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$V_k \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_k} \right|^{(1)} = V_k|^{(1)} \cdot V_x|^{(1)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)})$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial V_x} \right|^{(1)} = 2 \cdot V_x^2|^{(1)} G_{xx} + V_x|^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k|^{(1)} \cdot (G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)})]$$

$$V_x \left. \frac{\partial P_x^{calc}}{\partial V_x} \right|^{(1)} = P_x^{calc}|^{(1)} + V_x^2|^{(1)} \cdot G_{xx}$$

(206)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(1)} = V_x|^{(1)} \cdot V_k|^{(1)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)} (-1) + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)} (-1)]$$

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_k} \right|^{(1)} = -V_x|^{(1)} \cdot V_k|^{(1)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)}]$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(1)} = V_x|^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} [V_k|^{(1)} \cdot [G_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)} + B_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)}]]$$

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \delta_x} \right|^{(1)} = P_x^{calc}|^{(1)} - V_x^2|^{(1)} \cdot G_{xx}$$

(207)

Para $x \neq k$ (fuera de la diagonal):

$$V_k \left. \frac{\partial f_{Qx}}{\partial V_k} \right|^{(1)} = V_k|^{(1)} \cdot V_x|^{(1)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)})$$

Para $x=k$ (elemento diagonal):

$$V_x \left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial V_x} \right|^{(1)} = -2V_x^2|^{(1)} B_{xx} + V_x|^{(1)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x}}^{k=n} V_k|^{(1)} \cdot (G_{xk} \cdot \sin \delta_{xk}|^{(1)} - B_{xk} \cdot \cos \delta_{xk}|^{(1)})$$

$$V_x \frac{\partial Q_x^{calc}}{\partial V_x} \Big|^{(1)} = -V_x^2 \Big|^{(1)} \cdot B_{xk} + Q_x^{calc} \Big|^{(1)}$$

(208)

$$\left. \frac{\partial f_{P,x}}{\partial \lambda} \right|^{(1)} = -k_x^{(i)} \cdot k_x^{gen(i)} \cdot P_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot P_x^{load} = k_x^{(i)} \cdot [P_x^{load} - k_x^{gen(i)} \cdot P_x^{gen}]$$

$$\left. \frac{\partial f_{Q,x}}{\partial \lambda} \right|^{(1)} = -k_x^{(i)} \cdot Q_x^{gen} + k_x^{(i)} \cdot Q_x^{load} = k_x^{(i)} \cdot [Q_x^{load} - Q_x^{gen}]$$

(209)

Finalmente se resume el proceso de predicción-corrección en el siguiente diagrama:

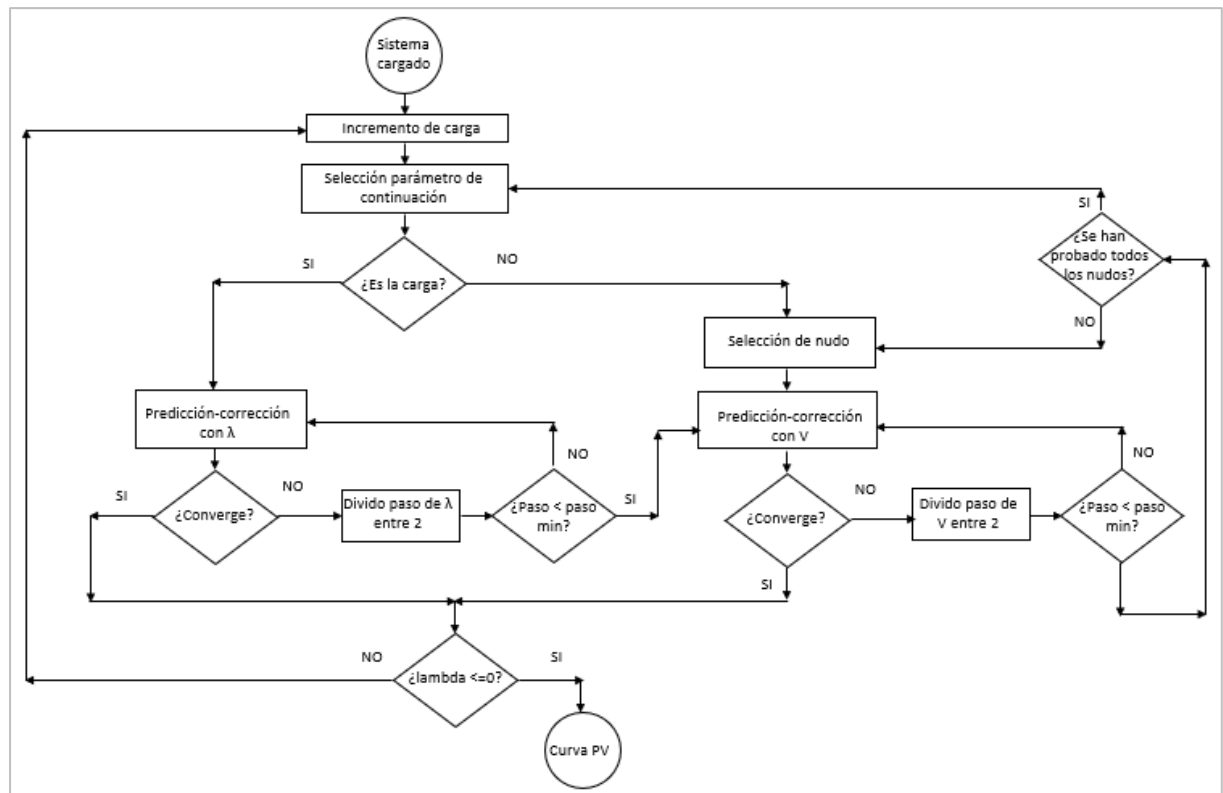


Figura 28. Diagrama de flujo para el proceso de predicción-corrección.

El proceso de predicción-corrección se inicia con la lectura de un fichero de datos de entrada. En dicho fichero se especifica la topología de la red y las condiciones de operación del sistema eléctrico. Con ello, es posible aplicar un flujo de cargas para determinar el estado eléctrico del sistema cargado.

A continuación se selecciona el parámetro de continuación. Inicialmente siempre se tomará la carga. En el caso de que el proceso corrector no converja, se divide el paso de avance o el parámetro de continuación entre dos. De esta manera se aumenta la precisión y podría alcanzarse la convergencia, puesto que el vector predictor y el vector corrector estarán más próximos entre sí. Sin embargo, esta división del tamaño de paso se debe limitar a un determinado número de iteraciones o a un umbral mínimo, para no aumentar desmesuradamente el tiempo de cálculo.

En el caso de que no se alcance la convergencia con el parámetro de carga, se procederá a seleccionar la tensión de uno de los nudos PQ como parámetro de continuación. Para determinar qué nudo se empleará, se comparará la variación porcentual de tensión entre los dos últimos puntos corregidos. El nudo que mayor variación presente (en valor absoluto) será tomado como parámetro de continuación. Análogamente al caso anterior, si el proceso corrector no converge, se divide el paso de avance entre dos, hasta que se llegue a un umbral mínimo predefinido por el usuario. Nuevamente, si no se alcanza la convergencia, se tomará la tensión del segundo nudo con mayor variación porcentual como parámetro de continuación.

Obviamente, el proceso de corrección, al igual que cualquier otro método numérico, tendrá como criterios de convergencia un número máximo de iteraciones y un determinado error admisible. Dichos valores son también parametrizables por el usuario. Finalmente, cuando el parámetro de carga alcanza un valor inferior o igual a cero, se da por concluido el proceso.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1 Sistema de 5 nudos

A continuación, se aplicará la metodología descrita a un sistema de 5 nudos eléctricos, compuesto por dos generadores, dos transformadores, tres líneas de transmisión y una carga.

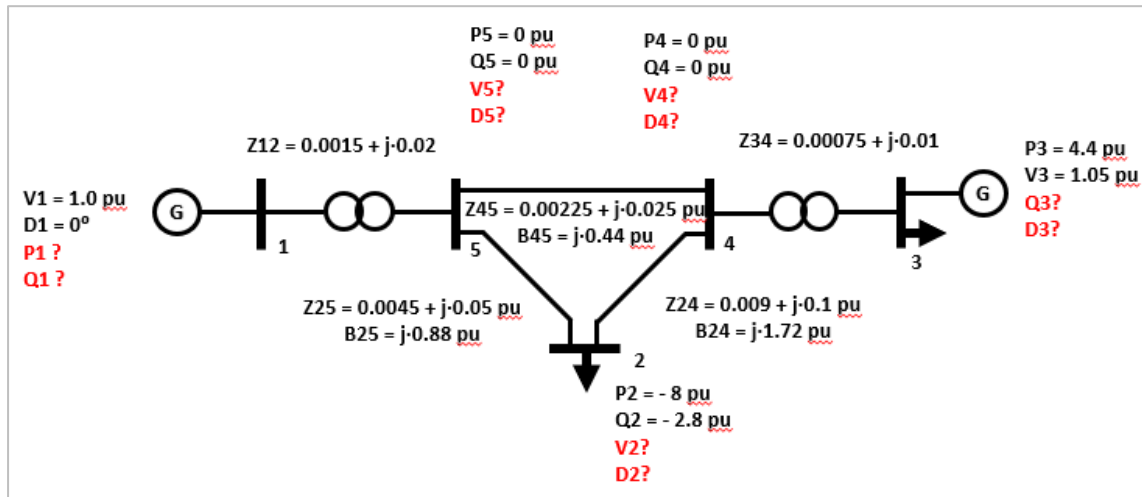


Figura 29. Sistema de 5 nudos eléctricos.

En primer lugar, es necesario determinar el estado eléctrico del sistema. Para ello se aplicará el método de Newton Raphson, considerando que la carga permanece inalterable, y que no existen límites de generación de potencia reactiva.

Tabla 6. Estado eléctrico inicial para el sistema de 5 nudos

Nudo	Tipo	Vmod [pu]	Varg[°]	Pcalc [MW]	Qcalc [MVar]
1	balance	+1.00000	+0.00000	+394.83876	+114.28290
2	PQ	+0.83377	-22.40642	-800.00000	-280.00000
3	PV	+1.05000	-0.59735	+440.00000	+297.47963
4	PQ	+1.01930	-2.83397	-0.00000	-0.00000
5	PQ	+0.97429	-4.54788	+0.00000	+0.00000

En la [Figura 30](#) se muestra la curva de continuación para el nudo 2, con el punto de máxima carga y su respectiva tensión de colapso. Se considera el paso de continuación del 10% para el parámetro de carga y cuando el parámetro es por tensión se considera del 5%, teniendo en cuenta que a medida que se disminuye el tamaño de paso, es mayor la precisión de la curva obtenida.

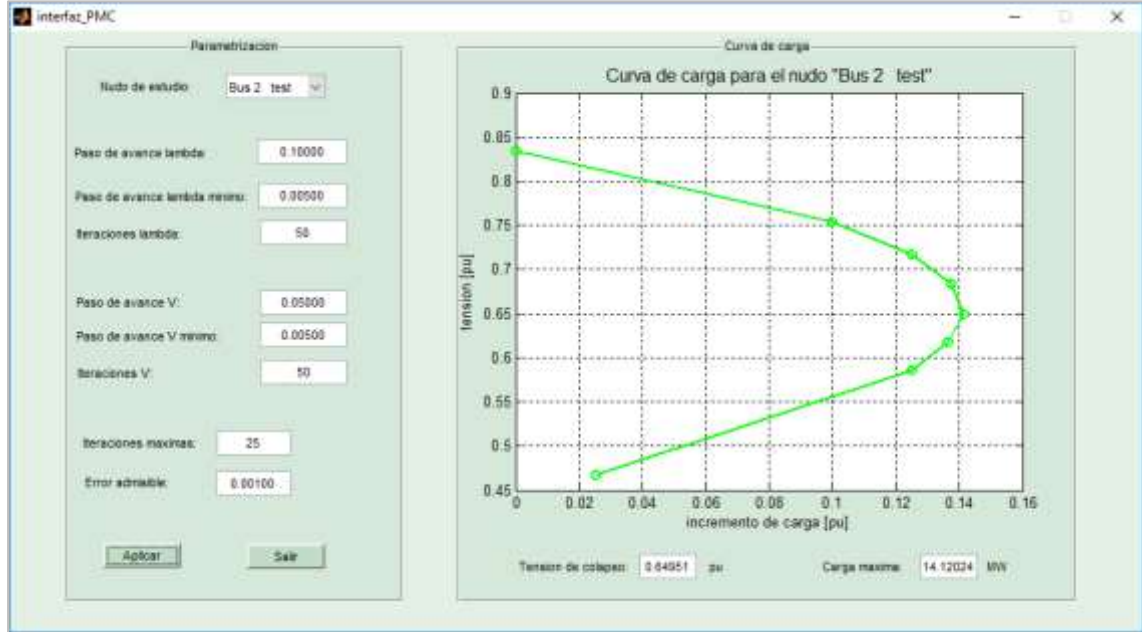


Figura 30. Curva de 5 nudos para el sistema de 5 nudos.

6.1.1 Segundo punto de la curva

Parámetro de continuación

Se parte del conocimiento del estado eléctrico inicial del sistema $\vec{x}^{(0)}$, obtenido en el cálculo del flujo de cargas convencional (no se ha alterado la carga del sistema). Por lo tanto, se inicializa el parámetro de carga $\lambda^{(0)}$ a cero:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(0)} \\ \delta_4^{(0)} \\ \delta_5^{(0)} \\ V_2^{(0)} \\ V_4^{(0)} \\ V_5^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3911 \text{ rad} \\ -0.0104 \text{ rad} \\ -0.0495 \text{ rad} \\ -0.0794 \text{ rad} \\ 0.8338 \text{ pu} \\ 1.0193 \text{ pu} \\ 0.9743 \text{ pu} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (210)$$

Inicialmente se tomará λ como parámetro de continuación, fijando su valor en 0.1. Es decir, se incrementará la carga en todos los nudos un 10%, manteniendo el factor de potencia constante. Puesto que la carga aumenta, el paso de avance será positivo:

$$x_k = x_g = \pm \sigma_\lambda = +0.1 \quad (211)$$

Predictor

Tras escoger el parámetro de continuación, y conociendo un estado eléctrico $\vec{x}^{(1)}$, se procederá a predecir un nuevo estado eléctrico $\vec{x}^{(2,pred)}$. Para ello, se deberá resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_3} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_4} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_5} \big|^{(0)} & V_2 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_2} \big|^{(0)} & V_4 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_4} \big|^{(0)} & V_5 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_5} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \big|^{(0)} \\ \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_3} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_4} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_5} \big|^{(0)} & V_2 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_2} \big|^{(0)} & V_4 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_4} \big|^{(0)} & V_5 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_5} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \lambda} \big|^{(0)} \\ \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_3} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_4} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_5} \big|^{(0)} & V_2 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_2} \big|^{(0)} & V_4 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_4} \big|^{(0)} & V_5 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_5} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \lambda} \big|^{(0)} \\ \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_3} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_4} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_5} \big|^{(0)} & V_2 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_2} \big|^{(0)} & V_4 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_4} \big|^{(0)} & V_5 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_5} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \lambda} \big|^{(0)} \\ \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_3} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_4} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_5} \big|^{(0)} & V_2 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_2} \big|^{(0)} & V_4 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_4} \big|^{(0)} & V_5 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_5} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \lambda} \big|^{(0)} \\ \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_3} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_4} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_5} \big|^{(0)} & V_2 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_2} \big|^{(0)} & V_4 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_4} \big|^{(0)} & V_5 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_5} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \lambda} \big|^{(0)} \\ \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_2} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_3} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_4} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_5} \big|^{(0)} & V_2 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_2} \big|^{(0)} & V_4 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_4} \big|^{(0)} & V_5 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_5} \big|^{(0)} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \lambda} \big|^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \Delta \delta_3^{(1)} \\ \Delta \delta_4^{(1)} \\ \Delta \delta_5^{(1)} \\ \frac{\Delta V_2^{(1)}}{V_2^{(0)}} \\ \frac{\Delta V_4^{(1)}}{V_4^{(0)}} \\ \frac{\Delta V_5^{(1)}}{V_5^{(0)}} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (212)$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.6 & 0 & -7.7 & -14.9 & -6.1 & -3.5 & -6.3 & 8 \\ 0 & 106.7 & -106.7 & 0 & 0 & -3.8 & 0 & -4.4 \\ -8.2 & -106.0 & 153.7 & -39.5 & 2.1 & 12.4 & -2.4 & 0 \\ -15.8 & 0 & -39.3 & 103.1 & 3.6 & -4.7 & 8.6 & 0 \\ -9.9 & 0 & 3.4 & 6.3 & 17.0 & -7.7 & -14.9 & 2.8 \\ -2.1 & 12.1 & -12.4 & 2.4 & -8.2 & 153.7 & -39.5 & 0 \\ -3.6 & 0 & 4.7 & -8.6 & -15.8 & -39.3 & 103.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \Delta \delta_3^{(1)} \\ \Delta \delta_4^{(1)} \\ \Delta \delta_5^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)}/V_2^{(0)} \\ \Delta V_4^{(1)}/V_4^{(0)} \\ \Delta V_5^{(1)}/V_5^{(0)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (213)$$

De esta manera se obtiene el vector tangente:

$$\begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \Delta \delta_3^{(1)} \\ \Delta \delta_4^{(1)} \\ \Delta \delta_5^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)}/V_2^{(0)} \\ \Delta V_4^{(1)}/V_4^{(0)} \\ \Delta V_5^{(1)}/V_5^{(0)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0704 \text{ rad} \\ -0.0034 \text{ rad} \\ -0.0072 \text{ rad} \\ -0.0100 \text{ rad} \\ -0.0718 \text{ pu} \\ -0.0095 \text{ pu} \\ -0.0175 \text{ pu} \\ 0.1000 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}^{(1,tang)} = \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \Delta \delta_3^{(1)} \\ \Delta \delta_4^{(1)} \\ \Delta \delta_5^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \\ \Delta V_4^{(1)} \\ \Delta V_5^{(1)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0704 \text{ rad} \\ -0.0034 \text{ rad} \\ -0.0072 \text{ rad} \\ -0.0100 \text{ rad} \\ -0.0599 \text{ pu} \\ -0.0096 \text{ pu} \\ -0.0171 \text{ pu} \\ 0.1000 \end{pmatrix} \quad (214)$$

El vector predictor se obtiene sumando al vector inicial el vector tangente:

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{x}^{(1,tang)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(0)} \\ \delta_4^{(0)} \\ \delta_5^{(0)} \\ V_2^{(0)} \\ V_4^{(0)} \\ V_5^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(1)} \\ \Delta\delta_3^{(1)} \\ \Delta\delta_4^{(1)} \\ \Delta\delta_5^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \\ \Delta V_4^{(1)} \\ \Delta V_5^{(1)} \\ \Delta\lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (215)$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.3911 \text{ rad} \\ -0.0104 \text{ rad} \\ -0.0495 \text{ rad} \\ -0.0794 \text{ rad} \\ 0.8338 \text{ pu} \\ 1.0193 \text{ pu} \\ 0.9743 \text{ pu} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0704 \text{ rad} \\ -0.0034 \text{ rad} \\ -0.0072 \text{ rad} \\ -0.0100 \text{ rad} \\ -0.0599 \text{ pu} \\ -0.0096 \text{ pu} \\ -0.0171 \text{ pu} \\ 0.1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4615 \text{ rad} \\ -0.0138 \text{ rad} \\ -0.0567 \text{ rad} \\ -0.0894 \text{ rad} \\ 0.7739 \text{ pu} \\ 1.0097 \text{ pu} \\ 0.9572 \text{ pu} \\ 0.100 \end{pmatrix}$$

Corrector

A partir del vector estado eléctrico obtenido en el proceso de predicción $\vec{x}^{(1)}$, se obtendrá el punto corregido $\vec{x}^{(2)}$. Para ello se empleará el método de Newton Raphson, pero manteniendo fijo el valor del parámetro de continuación y tomando un error admisible de 0.01 pu.

$$x_8^{(2)} = x_8^{(1)} = 0.1 \Rightarrow \Delta x_8 = 0 \quad (216)$$

Además, se deben cumplir las restricciones de potencia. Por una parte, se deben cumplir las restricciones de potencia activa para los nudos 2, 3, 4 y 5:

$$\begin{aligned} \{P_2^{gen} + k_2^{(1)} \cdot k_2^{gen(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_2^{gen} - P_2^{load} - 0.1 \cdot P_2^{load}\} &= -1.1 \cdot P_2^{load} = -1.1 \cdot 8 = -8.8 \text{ pu} \\ \{P_3^{gen} + k_3^{(1)} \cdot k_3^{gen(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_3^{gen} - P_3^{load} - k_3^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_3^{load}\} &= 1.1 \cdot P_3^{gen} = 1.1 \cdot 4.4 \\ &= 4.84 \text{ pu} \\ \{P_4^{gen} + k_4^{(1)} \cdot k_4^{gen(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_4^{gen} - P_4^{load} - k_4^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_4^{load}\} &= 0 \\ \{P_5^{gen} + k_5^{(1)} \cdot k_5^{gen(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_5^{gen} - P_5^{load} - k_5^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_5^{load}\} &= 0 \end{aligned} \quad (217)$$

Asimismo, para la potencia reactiva de los nudos 2, 4, 5:

$$\begin{aligned} \{Q_2^{gen} + k_2^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot Q_2^{gen} - Q_2^{load} - k_2^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot Q_2^{load}\} &= -1.1 \cdot Q_2^{load} = -1.1 \cdot 2.8 = -3.08 \text{ pu} \\ \{Q_4^{gen} + k_4^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot Q_4^{gen} - Q_4^{load} - k_4^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot Q_4^{load}\} &= 0 \\ \{Q_5^{gen} + k_5^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot Q_5^{gen} - Q_5^{load} - k_5^{(1)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot Q_5^{load}\} &= 0 \end{aligned} \quad (218)$$

Por lo tanto, se deberá resolver de forma iterativa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -f_{P,2}^{(1)} \\ -f_{P,3}^{(1)} \\ -f_{P,4}^{(1)} \\ -f_{P,5}^{(1)} \\ -f_{Q,2}^{(1)} \\ -f_{Q,4}^{(1)} \\ -f_{Q,5}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(2)} \\ \Delta \delta_3^{(2)} \\ \Delta \delta_4^{(2)} \\ \Delta \delta_5^{(2)} \\ \frac{\Delta V_2^{(2)}}{V_2^{(1)}} \\ \frac{\Delta V_4^{(2)}}{V_4^{(1)}} \\ \frac{\Delta V_5^{(2)}}{V_5^{(1)}} \\ \Delta \lambda^{(2)} \end{pmatrix} \quad (219)$$

Donde el vector términos independientes será función del estado eléctrico:

$$\begin{aligned} f_{P,2}^{(1)} &= \left\{ V_2^{2(1)} \cdot G_{22} + V_2^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{k=n} [V_k^{(1)} \cdot (G_{2k} \cdot \cos \delta_{2k}^{(1)} + B_{2k} \cdot \sin \delta_{2k}^{(1)})] \right\} - \{-8.8\} \\ f_{P,3}^{(1)} &= \left\{ V_3^{2(1)} \cdot G_{33} + V_3^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{k=n} [V_k^{(1)} \cdot (G_{3k} \cdot \cos \delta_{3k}^{(1)} + B_{3k} \cdot \sin \delta_{3k}^{(1)})] \right\} - \{4.84\} \\ f_{P,4}^{(1)} &= \left\{ V_4^{2(1)} \cdot G_{44} + V_4^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 4}}^{k=n} [V_k^{(1)} \cdot (G_{4k} \cdot \cos \delta_{4k}^{(1)} + B_{4k} \cdot \sin \delta_{4k}^{(1)})] \right\} - \{0\} \\ f_{P,5}^{(1)} &= \left\{ V_5^{2(1)} \cdot G_{55} + V_5^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{k=n} [V_k^{(1)} \cdot (G_{5k} \cdot \cos \delta_{5k}^{(1)} + B_{5k} \cdot \sin \delta_{5k}^{(1)})] \right\} - \{0\} \\ f_{Q,2}^{(1)} &= \left\{ -V_2^{2(1)} \cdot B_{22} + V_2^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{k=n} [V_k^{(1)} \cdot (G_{2k} \cdot \sin \delta_{2k}^{(1)} - B_{2k} \cdot \cos \delta_{2k}^{(1)})] \right\} - \{-3.08\} \\ f_{Q,4}^{(1)} &= \left\{ -V_4^{2(1)} \cdot B_{44} + V_4^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 4}}^{k=n} [V_k^{(1)} \cdot (G_{4k} \cdot \sin \delta_{4k}^{(1)} - B_{4k} \cdot \cos \delta_{4k}^{(1)})] \right\} - \{0\} \\ f_{Q,5}^{(1)} &= \left\{ -V_5^{2(1)} \cdot B_{55} + V_5^{(1)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{k=n} [V_k^{(1)} \cdot (G_{5k} \cdot \sin \delta_{5k}^{(1)} - B_{5k} \cdot \cos \delta_{5k}^{(1)})] \right\} - \{0\} \end{aligned} \quad (220)$$

Iterando, al cabo de cuatro iteraciones se llega a:

$$\begin{pmatrix} -0.00011 \\ -0.00000 \\ 0.00003 \\ 0.00007 \\ -0.00005 \\ -0.00000 \\ -0.00000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19.3 & 0 & -6.6 & -12.7 & -7.3 & -3.7 & -6.6 & 8 \\ 0 & 105.4 & -105.4 & 0 & 0 & -3.4 & 0 & -4.4 \\ -7.2 & -104.7 & 150.0 & -38.1 & 2.5 & 12.1 & -2.2 & 0 \\ -13.7 & 0 & -37.9 & 98.4 & 4.2 & -4.7 & 8.2 & 0 \\ -10.3 & 0 & 3.7 & 6.6 & 13.2 & -6.6 & -12.7 & 2.8 \\ -2.5 & 12.4 & -12.1 & 2.2 & -7.2 & 150.0 & -38.1 & 0 \\ -4.2 & 0 & 4.7 & -8.2 & -13.7 & -37.9 & 98.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(2)} \\ \Delta\delta_3^{(2)} \\ \Delta\delta_4^{(2)} \\ \Delta\delta_5^{(2)} \\ \Delta V_2^{(2)}/V_2^{(1)} \\ \Delta V_4^{(2)}/V_4^{(1)} \\ \Delta V_5^{(2)}/V_5^{(1)} \\ \Delta\lambda^{(2)} \end{pmatrix} \quad (221)$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(2)} \\ \Delta\delta_3^{(2)} \\ \Delta\delta_4^{(2)} \\ \Delta\delta_5^{(2)} \\ \Delta V_2^{(2)}/V_2^{(1)} \\ \Delta V_4^{(2)}/V_4^{(1)} \\ \Delta V_5^{(2)}/V_5^{(1)} \\ \Delta\lambda^{(2)} \end{pmatrix} = 0.0001 \begin{pmatrix} -0.1812 \text{ rad} \\ -0.0153 \text{ rad} \\ -0.0144 \text{ rad} \\ -0.0105 \text{ rad} \\ -0.2366 \text{ pu} \\ -0.0272 \text{ pu} \\ -0.0517 \text{ pu} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(2)} \\ \Delta\delta_3^{(2)} \\ \Delta\delta_4^{(2)} \\ \Delta\delta_5^{(2)} \\ \Delta V_2^{(2)} \\ \Delta V_4^{(2)} \\ \Delta V_5^{(2)} \\ \Delta\lambda^{(2)} \end{pmatrix} = 0.0001 \begin{pmatrix} -0.1812 \text{ rad} \\ -0.0153 \text{ rad} \\ -0.0144 \text{ rad} \\ -0.0105 \text{ rad} \\ -0.1782 \text{ pu} \\ -0.0274 \text{ pu} \\ -0.0492 \text{ pu} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (222)$$

Habiendo determinado el incremento, se determina el nuevo punto de operación:

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(1)} \\ \delta_3^{(0)} \\ \delta_4^{(0)} \\ \delta_5^{(0)} \\ V_2^{(0)} \\ V_4^{(0)} \\ V_5^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(1)} \\ \Delta\delta_3^{(1)} \\ \Delta\delta_4^{(1)} \\ \Delta\delta_5^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \\ \Delta V_4^{(1)} \\ \Delta V_5^{(1)} \\ \Delta\lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4821 \text{ rad} \\ -0.0156 \text{ rad} \\ -0.0583 \text{ rad} \\ -0.0907 \text{ rad} \\ 0.7535 \text{ pu} \\ 1.0065 \text{ pu} \\ 0.9515 \text{ pu} \\ 0.1 \end{pmatrix} + 0.0001 \begin{pmatrix} -0.1812 \text{ rad} \\ -0.0153 \text{ rad} \\ -0.0144 \text{ rad} \\ -0.0105 \text{ rad} \\ -0.1782 \text{ pu} \\ -0.0274 \text{ pu} \\ -0.0492 \text{ pu} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4822 \text{ rad} \\ -0.0156 \text{ rad} \\ -0.0583 \text{ rad} \\ -0.0907 \text{ rad} \\ 0.7535 \text{ pu} \\ 1.0065 \text{ pu} \\ 0.9514 \text{ pu} \\ 0.100 \end{pmatrix} \quad (223)$$

6.1.2 Cuarto punto de la curva

Parámetro de continuación

Se parte del conocimiento del estado eléctrico obtenido en el proceso de corrección previamente:

$$\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(3)} \\ \delta_3^{(3)} \\ \delta_4^{(3)} \\ \delta_5^{(3)} \\ V_2^{(3)} \\ V_4^{(3)} \\ V_5^{(3)} \\ \lambda^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5570 \text{ rad} \\ -0.0208 \text{ rad} \\ -0.0648 \text{ rad} \\ -0.0974 \text{ rad} \\ 0.6837 \text{ pu} \\ 0.9955 \text{ pu} \\ 0.9319 \text{ pu} \\ 0.1375 \end{pmatrix} \quad (224)$$

Se tomará como parámetro de continuación aquella variable eléctrica que haya sufrida mayor variación porcentual:

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_2^{(3)} - V_2^{(2)}}{V_2^{(2)}} \right| &= \left| \frac{0.6837 \text{ pu} - 0.7167 \text{ pu}}{0.7167 \text{ pu}} \right| = 0.046 \\ \left| \frac{V_4^{(3)} - V_4^{(2)}}{V_4^{(2)}} \right| &= \left| \frac{0.9955 \text{ pu} - 1.0007 \text{ pu}}{1.0007 \text{ pu}} \right| = 0.005 \\ \left| \frac{V_5^{(3)} - V_5^{(2)}}{V_5^{(2)}} \right| &= \left| \frac{0.9319 \text{ pu} - 0.9411 \text{ pu}}{0.9411 \text{ pu}} \right| = 0.010 \\ \left| \frac{\lambda^{(3)} - \lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \right| &= \left| \frac{0.1375 - 0.1250}{0.1250} \right| = 0.1 \end{aligned} \quad (225)$$

Como para λ no se alcanza la convergencia se toma V_2 como parámetro de continuación, fijando su valor:

$$x_k = x_5 = \pm \sigma_V = -0.05 \quad (226)$$

Predictor

Tras escoger el parámetro de continuación, y conociendo un estado eléctrico $\vec{x}^{(3)}$, se procederá a predecir un nuevo estado eléctrico $\vec{x}^{(3,pred)}$. Para ello, se deberá resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(4)} \\ \Delta \delta_3^{(4)} \\ \Delta \delta_4^{(4)} \\ \Delta \delta_5^{(4)} \\ \Delta V_2^{(4)} / V_2^{(3)} \\ \Delta V_4^{(4)} / V_4^{(3)} \\ \Delta V_5^{(4)} / V_5^{(3)} \\ \Delta \lambda^{(4)} \end{pmatrix} \quad (227)$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.5 & 0 & -5.7 & -10.8 & -7.8 & -3.7 & -6.3 & 8 \\ 0 & 104.2 & -104.2 & 0 & 0 & -3.2 & 0 & -4.4 \\ -6.2 & -103.5 & 146.6 & -36.9 & 2.7 & 11.8 & -2.1 & 0 \\ -11.8 & 0 & -36.7 & 94.3 & 4.6 & -4.5 & 7.8 & 0 \\ -10.4 & 0 & 3.7 & 6.6 & 10.1 & -5.7 & -10.8 & 2.8 \\ -2.7 & 12.4 & -11.8 & 2.1 & -6.2 & 146.6 & -36.9 & 0 \\ -4.6 & 0 & 4.5 & -7.9 & -11.8 & -36.7 & 94.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \Delta \delta_3^{(1)} \\ \Delta \delta_4^{(1)} \\ \Delta \delta_5^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} / V_2^{(0)} \\ \Delta V_4^{(1)} / V_4^{(0)} \\ \Delta V_5^{(1)} / V_5^{(0)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \quad (228)$$

De esta manera se obtiene el vector tangente:

$$\begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(4)} \\ \Delta \delta_3^{(4)} \\ \Delta \delta_4^{(4)} \\ \Delta \delta_5^{(4)} \\ \Delta V_2^{(4)} / V_2^{(3)} \\ \Delta V_4^{(4)} / V_4^{(3)} \\ \Delta V_5^{(4)} / V_5^{(3)} \\ \Delta \lambda^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0358 \text{ rad} \\ -0.0027 \text{ rad} \\ -0.0029 \text{ rad} \\ -0.0026 \text{ rad} \\ -0.0500 \text{ pu} \\ -0.0053 \text{ pu} \\ -0.0102 \text{ pu} \\ 0.0083 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}^{(4,tang)} = \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(4)} \\ \Delta \delta_3^{(4)} \\ \Delta \delta_4^{(4)} \\ \Delta \delta_5^{(4)} \\ \Delta V_2^{(4)} \\ \Delta V_4^{(4)} \\ \Delta V_5^{(4)} \\ \Delta \lambda^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0358 \text{ rad} \\ -0.0027 \text{ rad} \\ -0.0029 \text{ rad} \\ -0.0026 \text{ rad} \\ -0.0342 \text{ pu} \\ -0.0053 \text{ pu} \\ -0.0095 \text{ pu} \\ 0.0083 \end{pmatrix} \quad (229)$$

El vector predictor se obtiene sumando al vector inicial el vector tangente:

$$\vec{x}^{(4)} = \vec{x}^{(3)} + \vec{x}^{(4,tang)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(3)} \\ \delta_3^{(3)} \\ \delta_4^{(3)} \\ \delta_5^{(3)} \\ V_2^{(3)} \\ V_4^{(3)} \\ V_5^{(3)} \\ \lambda^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(4)} \\ \Delta\delta_3^{(4)} \\ \Delta\delta_4^{(4)} \\ \Delta\delta_5^{(4)} \\ \Delta V_2^{(4)} \\ \Delta V_4^{(4)} \\ \Delta V_5^{(4)} \\ \Delta\lambda^{(4)} \end{pmatrix} \quad (230)$$

$$\vec{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} -0.5570 \text{ rad} \\ -0.0208 \text{ rad} \\ -0.0648 \text{ rad} \\ -0.0974 \text{ rad} \\ 0.6837 \text{ pu} \\ 0.9955 \text{ pu} \\ 0.9319 \text{ pu} \\ 0.1375 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0358 \text{ rad} \\ -0.0027 \text{ rad} \\ -0.0029 \text{ rad} \\ -0.0026 \text{ rad} \\ -0.0342 \text{ pu} \\ -0.0053 \text{ pu} \\ -0.0095 \text{ pu} \\ 0.0083 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5928 \text{ rad} \\ -0.0236 \text{ rad} \\ -0.0677 \text{ rad} \\ -0.1000 \text{ rad} \\ 0.6495 \text{ pu} \\ 0.9903 \text{ pu} \\ 0.9224 \text{ pu} \\ 0.1458 \end{pmatrix}$$

Corrector

A partir del vector estado eléctrico obtenido en el proceso de predicción $\vec{x}^{(4)}$, se obtendrá el punto corregido $\vec{x}^{(5)}$. Para ello se empleará el método de Newton Raphson, pero manteniendo fijo el valor del parámetro de continuación y tomando, al igual que en el punto anterior, un error admisible de 0.01 pu.

$$x_5^{(5)} = x_5^{(4)} = 0.6495 \Rightarrow \Delta x_5 = 0 \quad (231)$$

Por lo tanto, se deberá resolver de forma iterativa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -f_{P,2}^{(4)} \\ -f_{P,3}^{(4)} \\ -f_{P,4}^{(4)} \\ -f_{P,5}^{(4)} \\ -f_{Q,2}^{(4)} \\ -f_{Q,4}^{(4)} \\ -f_{Q,5}^{(4)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,2}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,3}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,3}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,4}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,4}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{P,5}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{P,5}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,4}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \delta_5} & V_2 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_2} & V_4 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_4} & V_5 \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial V_5} & \frac{\partial f_{Q,5}}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(5)} \\ \Delta\delta_3^{(5)} \\ \Delta\delta_4^{(5)} \\ \Delta\delta_5^{(5)} \\ \frac{\Delta V_2^{(5)}}{V_2^{(4)}} \\ \frac{\Delta V_4^{(5)}}{V_4^{(4)}} \\ \frac{\Delta V_5^{(5)}}{V_5^{(4)}} \\ \Delta\lambda^{(5)} \end{pmatrix} \quad (232)$$

Para ello es necesario que se cumplan las restricciones de potencia activa para nudos 2, 3, 4, 5; así como para la potencia reactiva de los nudos 2, 4, 5:

$$\begin{aligned}
 \{P_2^{gen} + k_2^{(4)} \cdot k_2^{gen(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot P_2^{gen} - P_2^{load} - k_2^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot P_2^{load}\} &= -1.1412 \cdot P_2^{load} = -1.1412 \cdot 8 \\
 &= -9.1296 \text{ pu} \\
 \{P_3^{gen} + k_3^{(4)} \cdot k_3^{gen(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot P_3^{gen} - P_3^{load} - k_3^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot P_3^{load}\} &= 1.1412 \cdot P_3^{gen} = 1.1412 \cdot 4.4 \\
 &= 5.0213 \text{ pu} \\
 \{P_4^{gen} + k_4^{(4)} \cdot k_4^{gen(4)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_4^{gen} - P_4^{load} - k_4^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot P_4^{load}\} &= 0 \\
 \{P_5^{gen} + k_5^{(4)} \cdot k_5^{gen(4)} \cdot \lambda^{(1)} \cdot P_5^{gen} - P_5^{load} - k_5^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot P_5^{load}\} &= 0 \\
 \{Q_2^{gen} + k_2^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot Q_2^{gen} - Q_2^{load} - k_2^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot Q_2^{load}\} &= -1.1 \cdot Q_2^{load} = -1.1412 \cdot 2.8 \\
 &= -3.1954 \text{ pu} \\
 \{Q_4^{gen} + k_4^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot Q_4^{gen} - Q_4^{load} - k_4^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot Q_4^{load}\} &= 0 \\
 \{Q_5^{gen} + k_5^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot Q_5^{gen} - Q_5^{load} - k_5^{(4)} \cdot \lambda^{(4)} \cdot Q_5^{load}\} &= 0
 \end{aligned} \tag{233}$$

Por lo tanto, se obtiene el vector términos independientes:

$$\begin{aligned}
 f_{P,2}^{(4)} &= \left\{ V_2^{2(4)} \cdot G_{22} + V_2^{(4)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{k=n} [V_k^{(4)} \cdot (G_{2k} \cdot \cos \delta_{2k}^{(4)} + B_{2k} \cdot \sin \delta_{2k}^{(4)})] \right\} - \{-9.1296\} \\
 f_{P,3}^{(4)} &= \left\{ V_3^{2(4)} \cdot G_{33} + V_3^{(4)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{k=n} [V_k^{(4)} \cdot (G_{3k} \cdot \cos \delta_{3k}^{(4)} + B_{3k} \cdot \sin \delta_{3k}^{(4)})] \right\} - \{5.0213\} \\
 f_{P,4}^{(4)} &= \left\{ V_4^{2(4)} \cdot G_{44} + V_4^{(4)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 4}}^{k=n} [V_k^{(4)} \cdot (G_{4k} \cdot \cos \delta_{4k}^{(4)} + B_{4k} \cdot \sin \delta_{4k}^{(4)})] \right\} - \{0\} \\
 f_{P,5}^{(4)} &= \left\{ V_5^{2(4)} \cdot G_{55} + V_5^{(4)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{k=n} [V_k^{(4)} \cdot (G_{5k} \cdot \cos \delta_{5k}^{(4)} + B_{5k} \cdot \sin \delta_{5k}^{(4)})] \right\} - \{0\} \\
 f_{Q,2}^{(4)} &= \left\{ -V_2^{2(4)} \cdot B_{22} + V_2^{(4)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{k=n} [V_k^{(4)} \cdot (G_{2k} \cdot \sin \delta_{2k}^{(4)} - B_{2k} \cdot \cos \delta_{2k}^{(4)})] \right\} - \{-3.195\} \\
 f_{Q,4}^{(4)} &= \left\{ -V_4^{2(4)} \cdot B_{44} + V_4^{(4)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 4}}^{k=n} [V_k^{(4)} \cdot (G_{4k} \cdot \sin \delta_{4k}^{(4)} - B_{4k} \cdot \cos \delta_{4k}^{(4)})] \right\} - \{0\} \\
 f_{Q,5}^{(4)} &= \left\{ -V_5^{2(4)} \cdot B_{55} + V_5^{(4)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 5}}^{k=n} [V_k^{(4)} \cdot (G_{5k} \cdot \sin \delta_{5k}^{(4)} - B_{5k} \cdot \cos \delta_{5k}^{(4)})] \right\} - \{0\}
 \end{aligned} \tag{234}$$

Finalmente, al cabo de unas 5 iteraciones:

$$\begin{pmatrix} 0.0049 \cdot 10^{-5} \\ -0.0454 \cdot 10^{-5} \\ -0.0336 \cdot 10^{-5} \\ 0.0877 \cdot 10^{-5} \\ -0.0650 \cdot 10^{-5} \\ -0.1023 \cdot 10^{-5} \\ -0.2188 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.2 & 0 & -5.2 & -10.0 & -8.0 & -3.7 & -6.6 & 8 \\ 0 & 103.6 & -103.6 & 0 & 0 & -3.2 & 0 & -4.4 \\ -5.8 & -103.0 & 145.1 & -36.3 & 2.7 & 11.7 & -2.1 & 0 \\ -11.0 & 0 & -36.1 & 92.4 & 4.6 & -4.4 & 7.7 & 0 \\ -10.3 & 0 & 3.7 & 6.6 & 8.8 & -5.2 & -10.0 & 2.8 \\ -2.7 & 12.3 & -11.7 & 2.1 & -5.8 & 145.1 & -36.3 & 0 \\ -4.7 & 0 & 4.4 & -7.7 & -11.0 & -36.1 & 92.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(5)} \\ \Delta\delta_3^{(5)} \\ \Delta\delta_4^{(5)} \\ \Delta\delta_5^{(5)} \\ \Delta V_2^{(5)}/V_2^{(4)} \\ \Delta V_4^{(5)}/V_4^{(4)} \\ \Delta V_5^{(5)}/V_5^{(4)} \\ \Delta\lambda^{(5)} \end{pmatrix} \quad (235)$$

Despejando:

$$\begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(5)} \\ \Delta\delta_3^{(5)} \\ \Delta\delta_4^{(5)} \\ \Delta\delta_5^{(5)} \\ \Delta V_2^{(5)}/V_2^{(4)} \\ \Delta V_4^{(5)}/V_4^{(4)} \\ \Delta V_5^{(5)}/V_5^{(4)} \\ \Delta\lambda^{(5)} \end{pmatrix} = 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0.0633 \text{ rad} \\ -0.0191 \text{ rad} \\ -0.0091 \text{ rad} \\ 0.0149 \text{ rad} \\ 0.0000 \text{ pu} \\ -0.0110 \text{ pu} \\ -0.0231 \text{ pu} \\ -0.1256 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(5)} \\ \Delta\delta_3^{(5)} \\ \Delta\delta_4^{(5)} \\ \Delta\delta_5^{(5)} \\ \Delta V_2^{(5)} \\ \Delta V_4^{(5)} \\ \Delta V_5^{(5)} \\ \Delta\lambda^{(5)} \end{pmatrix} = 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0.0633 \text{ rad} \\ -0.0191 \text{ rad} \\ -0.0091 \text{ rad} \\ 0.0149 \text{ rad} \\ 0.0000 \text{ pu} \\ -0.0109 \text{ pu} \\ -0.0213 \text{ pu} \\ -0.1256 \end{pmatrix} \quad (236)$$

Finalmente se obtiene el nuevo punto corregido de la curva:

$$\vec{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(4)} \\ \delta_3^{(4)} \\ \delta_4^{(4)} \\ \delta_5^{(4)} \\ V_2^{(4)} \\ V_4^{(4)} \\ V_5^{(4)} \\ \lambda^{(4)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\delta_2^{(5)} \\ \Delta\delta_3^{(5)} \\ \Delta\delta_4^{(5)} \\ \Delta\delta_5^{(5)} \\ \Delta V_2^{(5)} \\ \Delta V_4^{(5)} \\ \Delta V_5^{(5)} \\ \Delta\lambda^{(5)} \end{pmatrix} \quad (237)$$

$$\vec{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} -0.5924 \text{ rad} \\ -0.0236 \text{ rad} \\ -0.0676 \text{ rad} \\ -0.0997 \text{ rad} \\ 0.6495 \text{ pu} \\ 0.9903 \text{ pu} \\ 0.9225 \text{ pu} \\ 0.1412 \end{pmatrix} + 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0.0633 \text{ rad} \\ -0.0191 \text{ rad} \\ -0.0091 \text{ rad} \\ 0.0149 \text{ rad} \\ 0.0000 \text{ pu} \\ -0.0109 \text{ pu} \\ -0.0213 \text{ pu} \\ -0.1256 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5924 \text{ rad} \\ -0.0236 \text{ rad} \\ -0.0676 \text{ rad} \\ -0.0997 \text{ rad} \\ 0.6495 \text{ pu} \\ 0.9903 \text{ pu} \\ 0.9225 \text{ pu} \\ 0.1412 \end{pmatrix}$$

A título ilustrativo, se muestran los resultados obtenidos:

Tabla 7. Resultados para el sistema eléctrico de 5 nudos

Punto	Parámetro continuación	Incremento de carga λ [pu]	V2 [pu]	V4 [pu]	V5 [pu]
1	λ	0	0.8338	1.0193	0.9743
2	λ	0.1000	0.7535	1.0065	0.9514
3	λ	0.1250	0.7167	1.0007	0.9411
4	λ	0.1375	0.6837	0.9955	0.9319
5	V2	0.1412	0.6495	0.9903	0.9225
6	V2	0.1366	0.6170	0.9854	0.9137
7	V2	0.1252	0.5862	0.9809	0.9055
8	λ	0.0252	0.4678	0.9643	0.8754

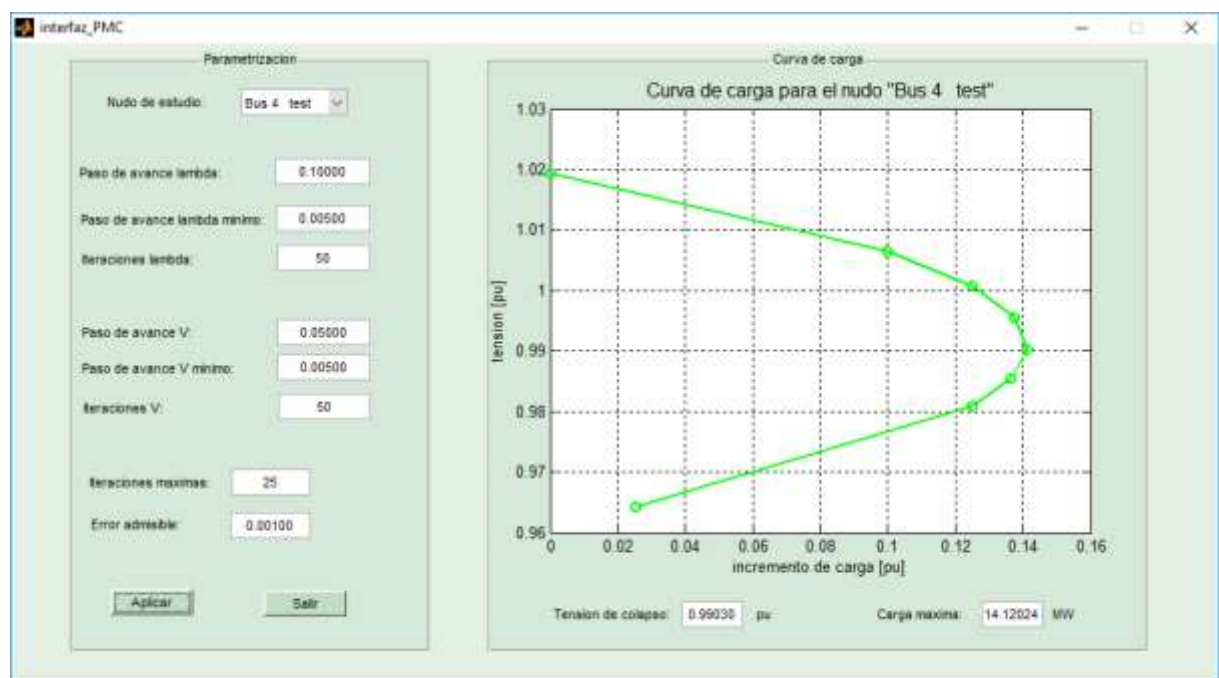


Figura 31. Curva de carga para el sistema eléctrico de 5 nudos

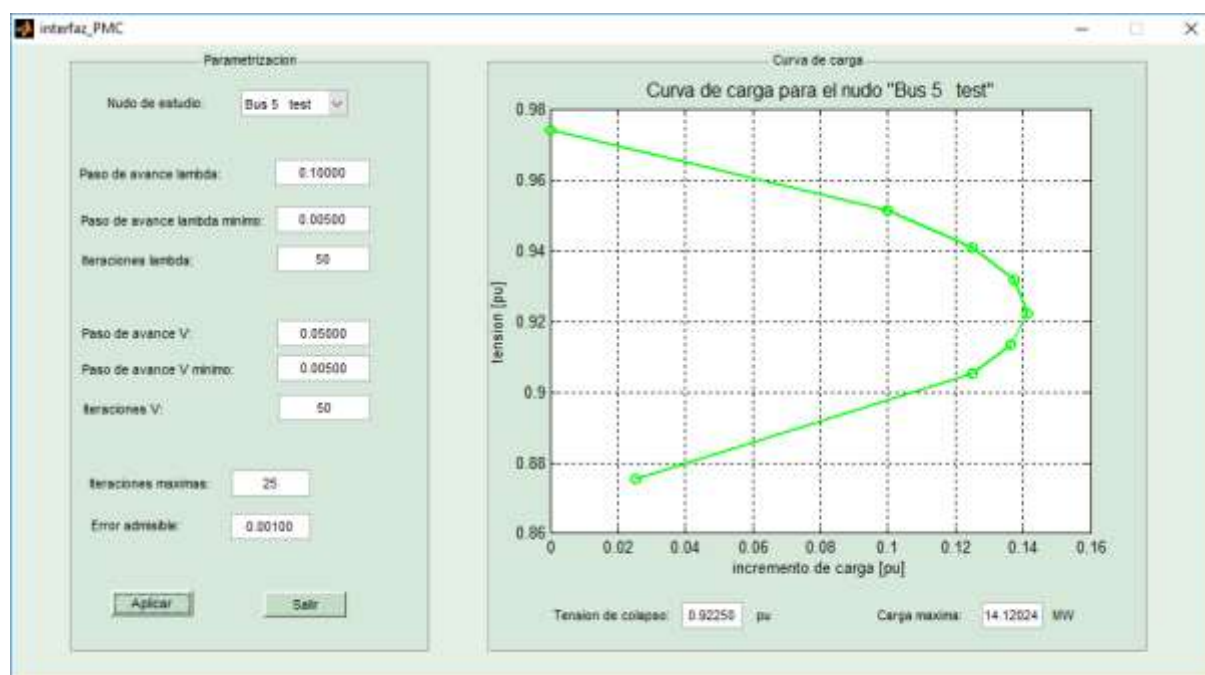


Figura 32. Curva de carga para el sistema eléctrico de 5 nudos

6.2 Sistema de 14 nudos

En las figuras 33 y 34 se muestra el sistema IEEE14, compuesto por 14 nudos eléctricos y 20 líneas eléctricas.

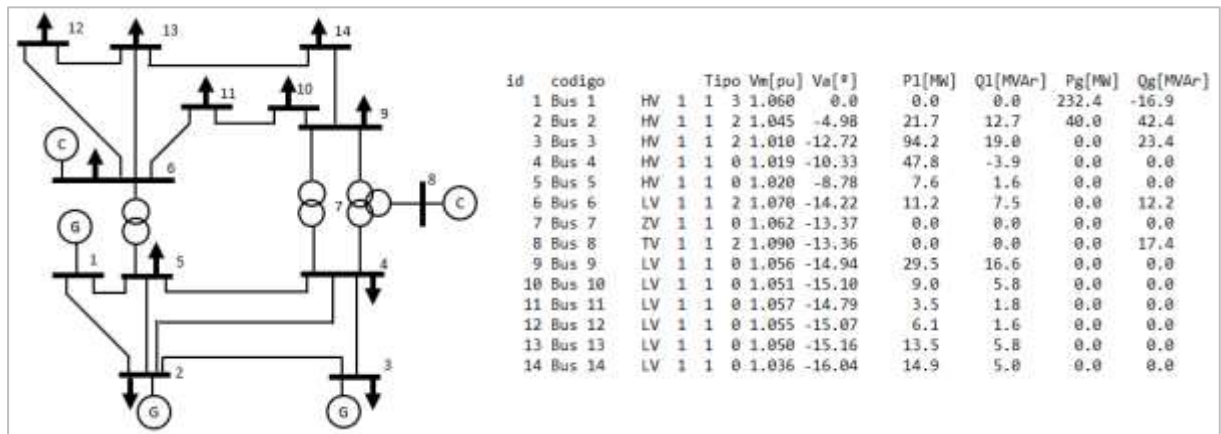


Figura 33. Nudos eléctricos del sistema de 14 nudos

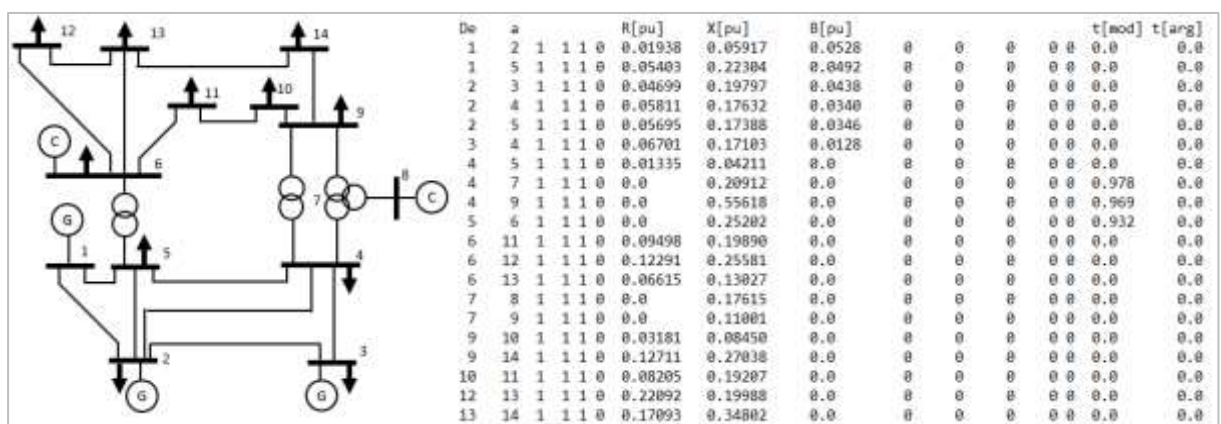


Figura 34. Líneas eléctricas del sistema de 14 nudos

Para dicho sistema, tras haber aplicado el flujo de cargas continuado, se obtiene un punto máximo de carga de 301 MW ($\lambda=3.01$), que corresponde con el triple de la potencia base del sistema (a priori un margen de carga muy grande). Se recuerda que la situación inicial de partida del sistema sin sobrecarga corresponde a $\lambda=0$.

Desde la figura 35 hasta la figura 43 se muestran los perfiles de tensión de los nudos más significativos. Se concluye que el nudo crítico es el nudo 5 con una tensión de 0.689 pu. Los siguientes nudos más comprometidos en cuanto a estabilidad de tensión son los nudos 14 y 4 con unas tensiones de 0.703 pu y 0.715 pu respectivamente en el punto máximo de carga.

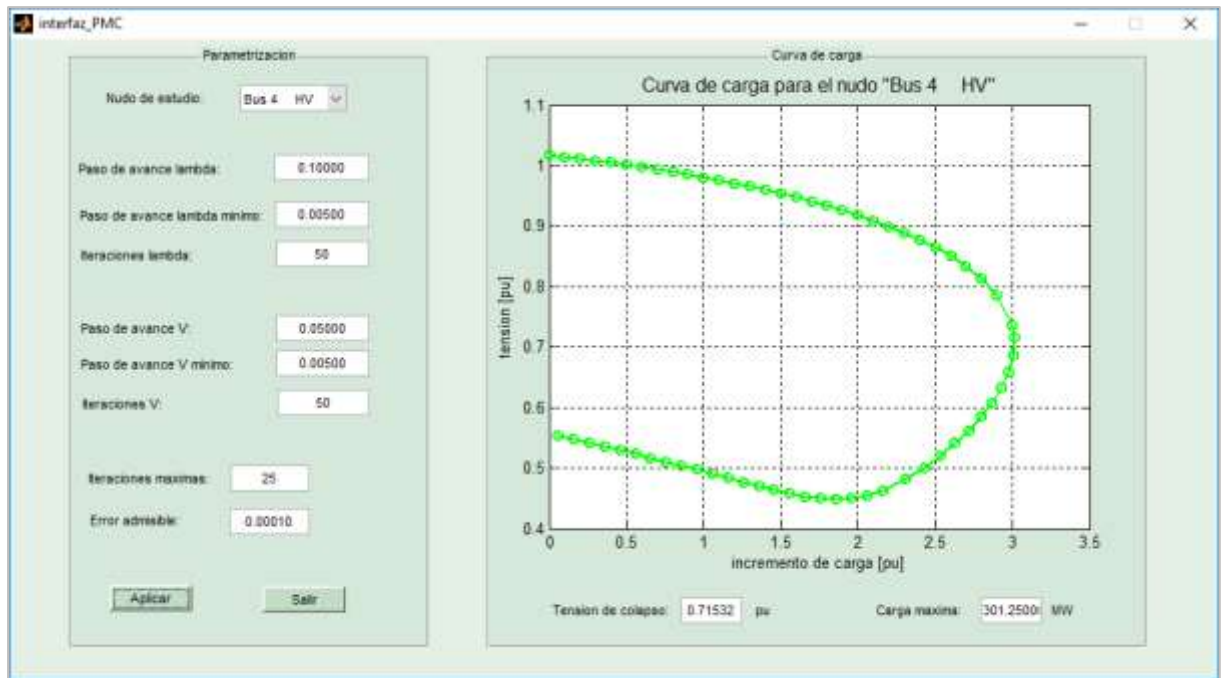


Figura 35. Flujo de carga continuado para el nudo 4 del sistema de 14 nudos

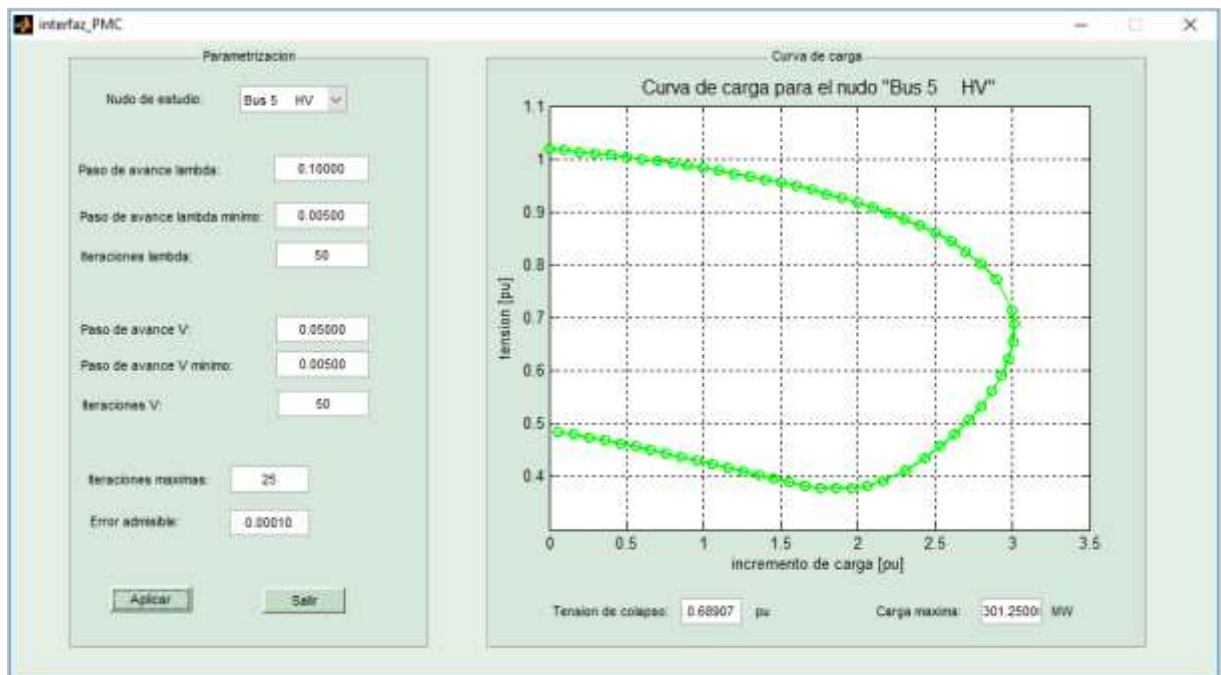


Figura 36. Flujo de carga continuado para el nudo 5 del sistema de 14 nudos

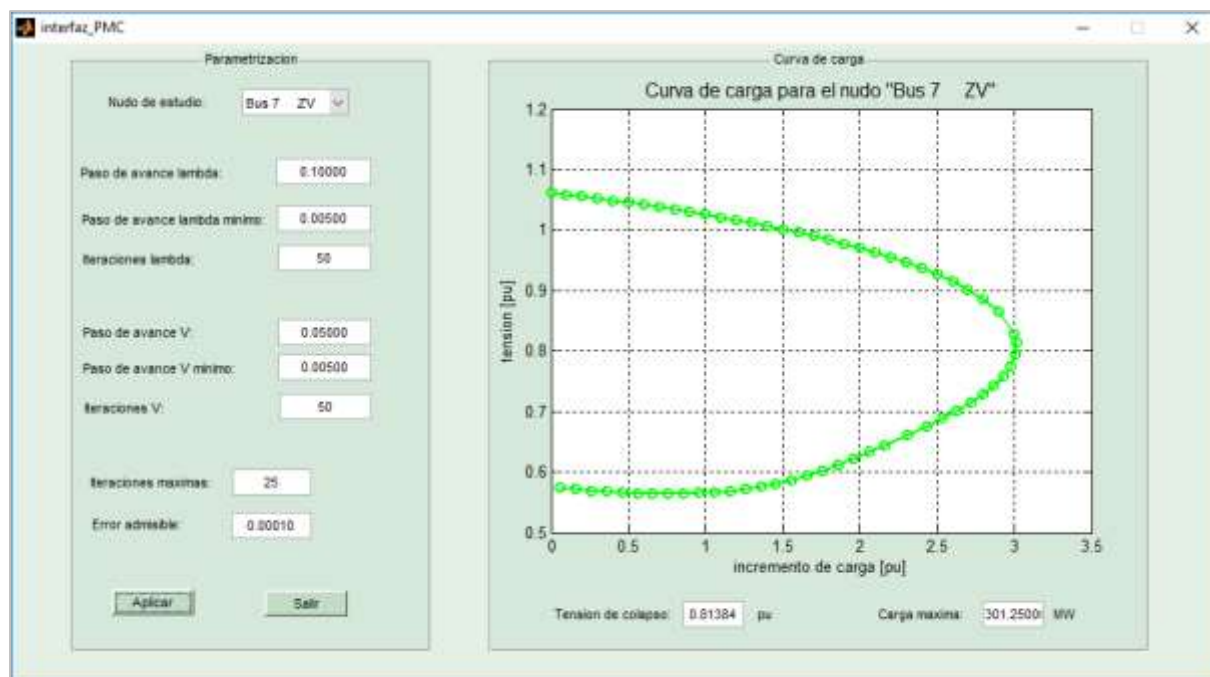


Figura 37. Flujo de carga continuado para el nudo 7 del sistema de 14 nudos

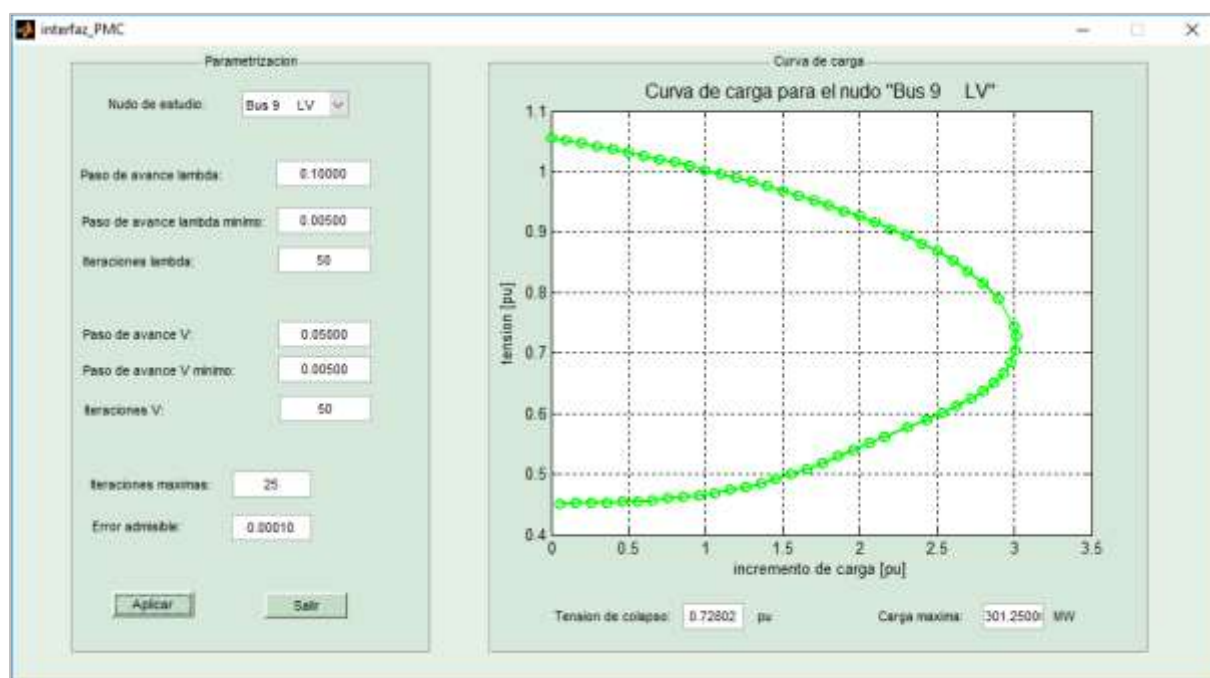


Figura 38. Flujo de carga continuado para el nudo 9 del sistema de 14 nudos

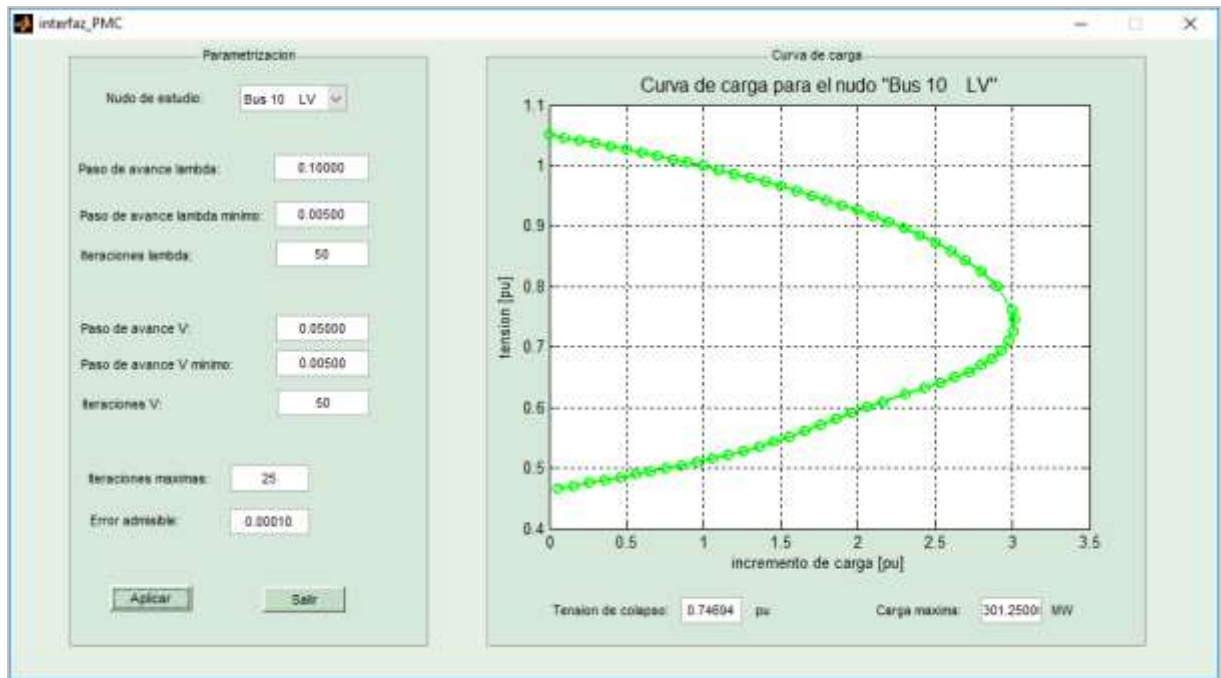


Figura 39. Flujo de carga continuado para el nudo 10 del sistema de 14 nudos

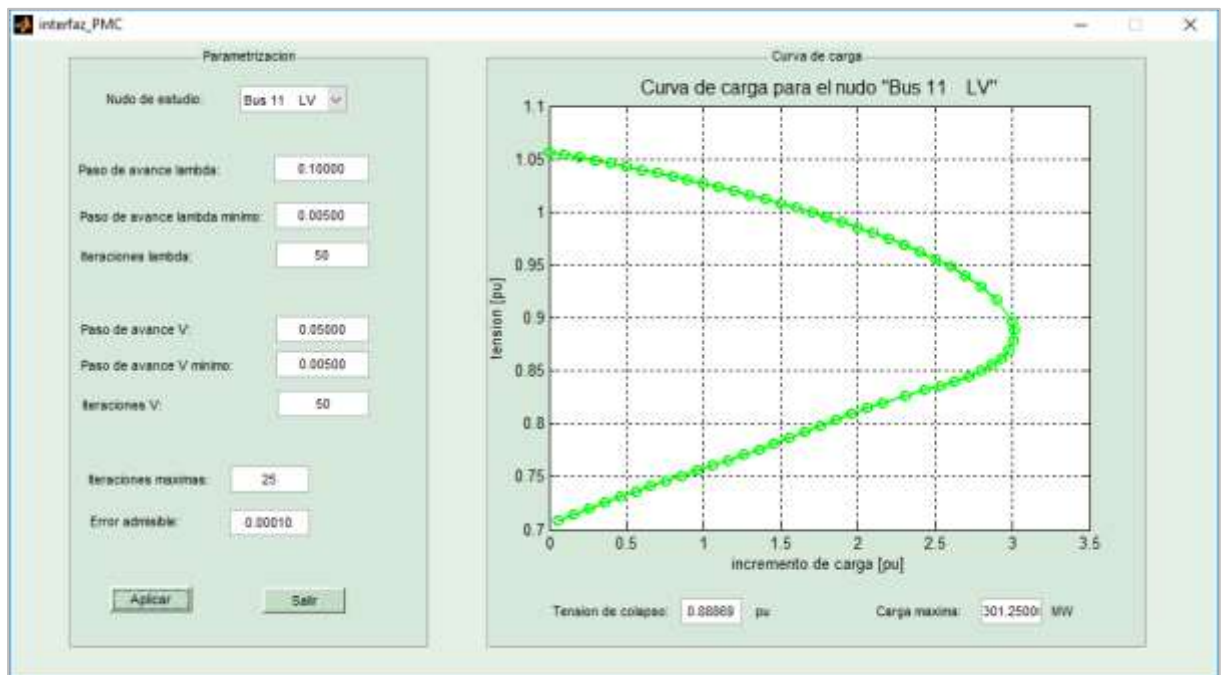


Figura 40. Flujo de carga continuado para el nudo 11 del sistema de 14 nudos

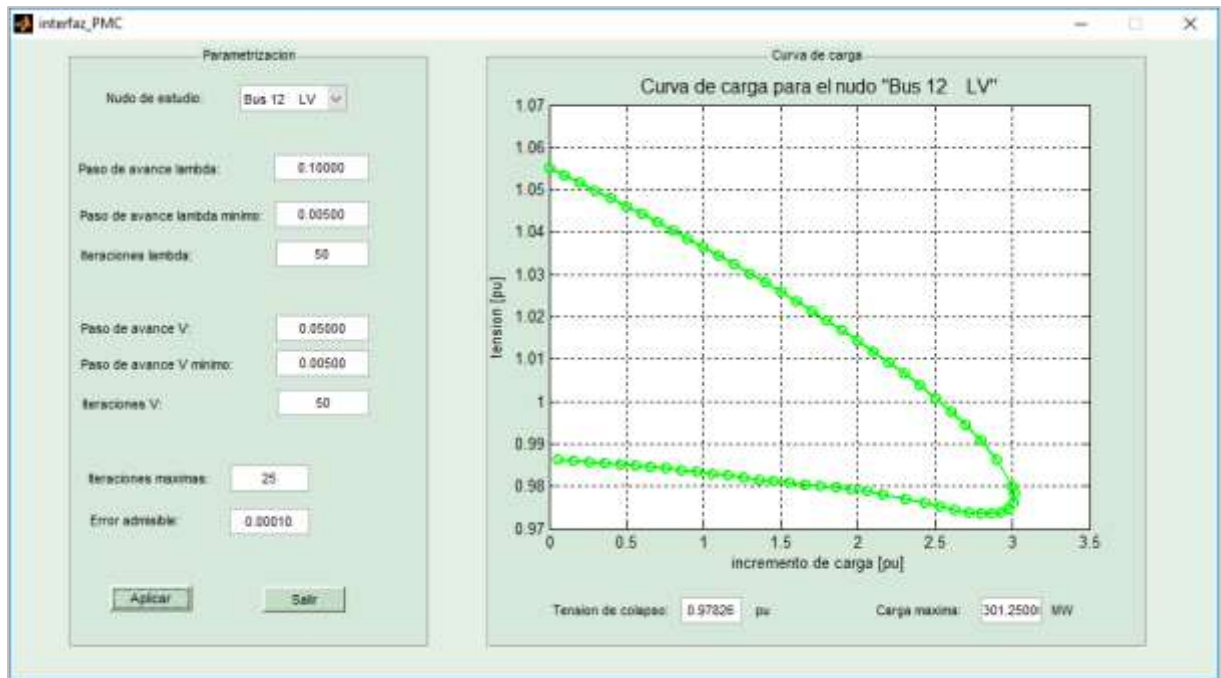


Figura 41. Flujo de carga continuado para el nudo 12 del sistema de 14 nudos

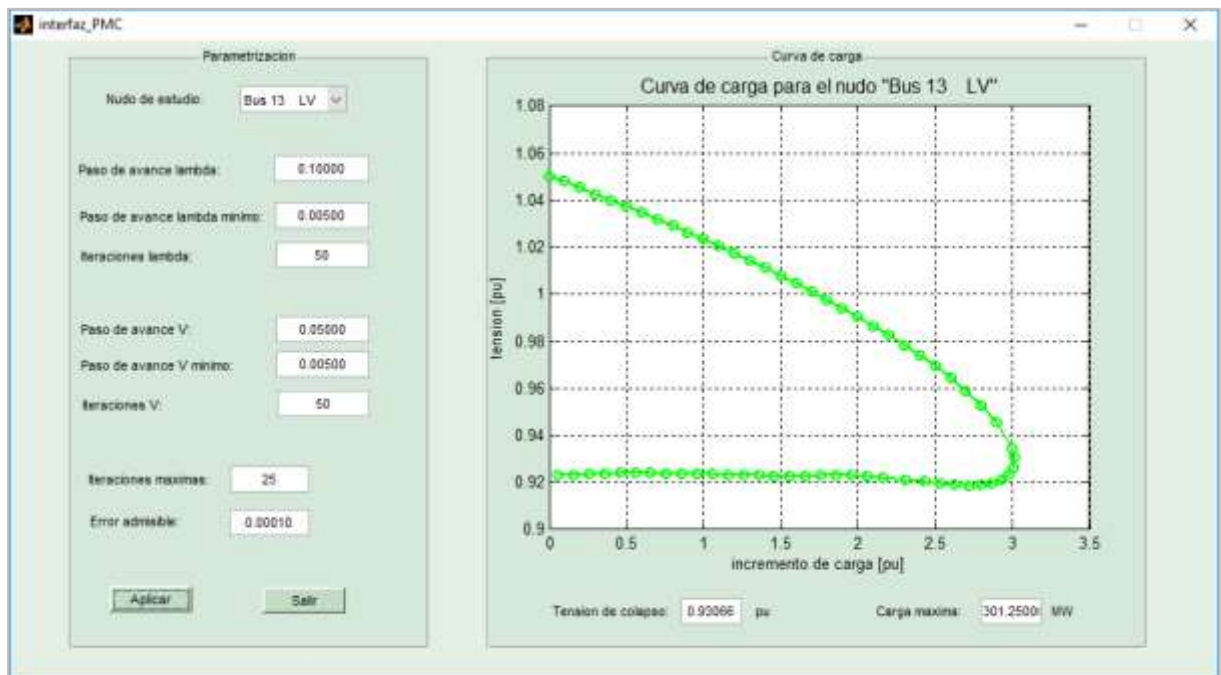


Figura 42. Flujo de carga continuado para el nudo 13 del sistema de 14 nudos

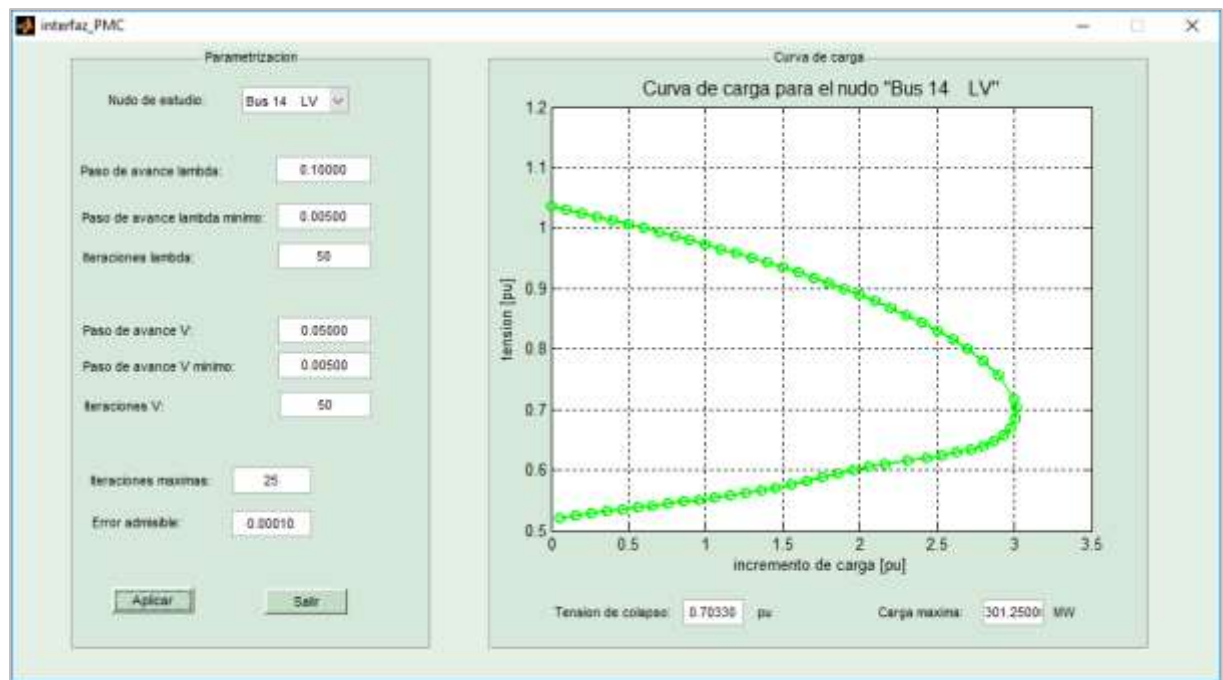


Figura 43. Flujo de carga continuado para el nudo 14 del sistema de 14 nudos

6.3 Sistema de 30 nudos

En las figuras 44 y 45 se muestra el sistema IEEE30, compuesto por 30 nudos eléctricos y 41 líneas eléctricas.

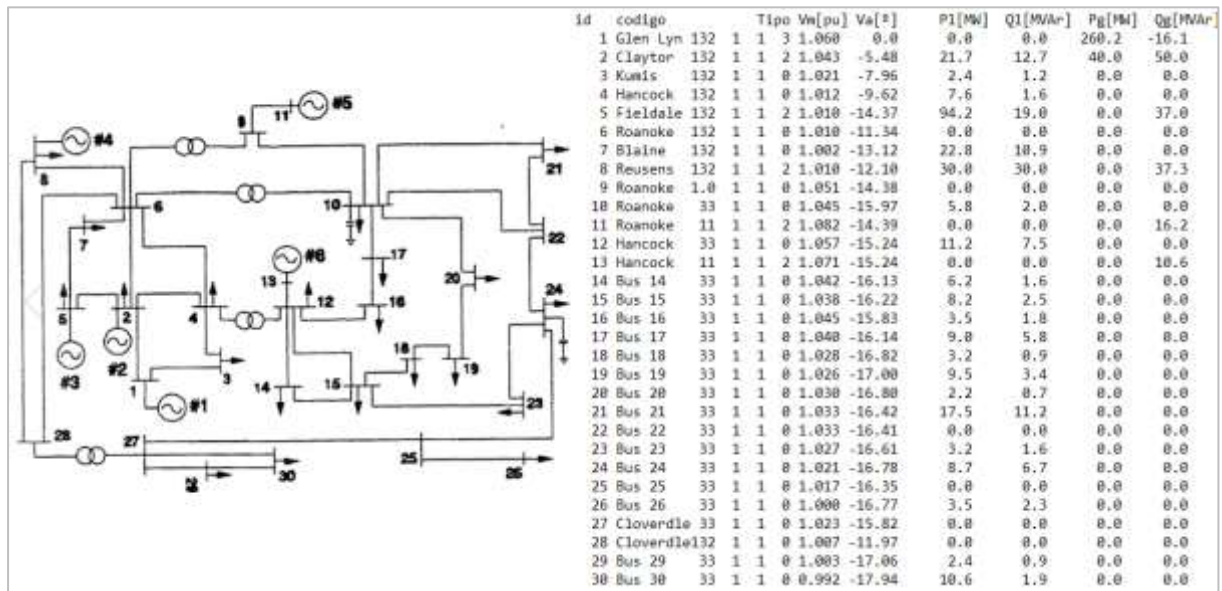


Figura 44. Nudos eléctricos del sistema de 30 nudos

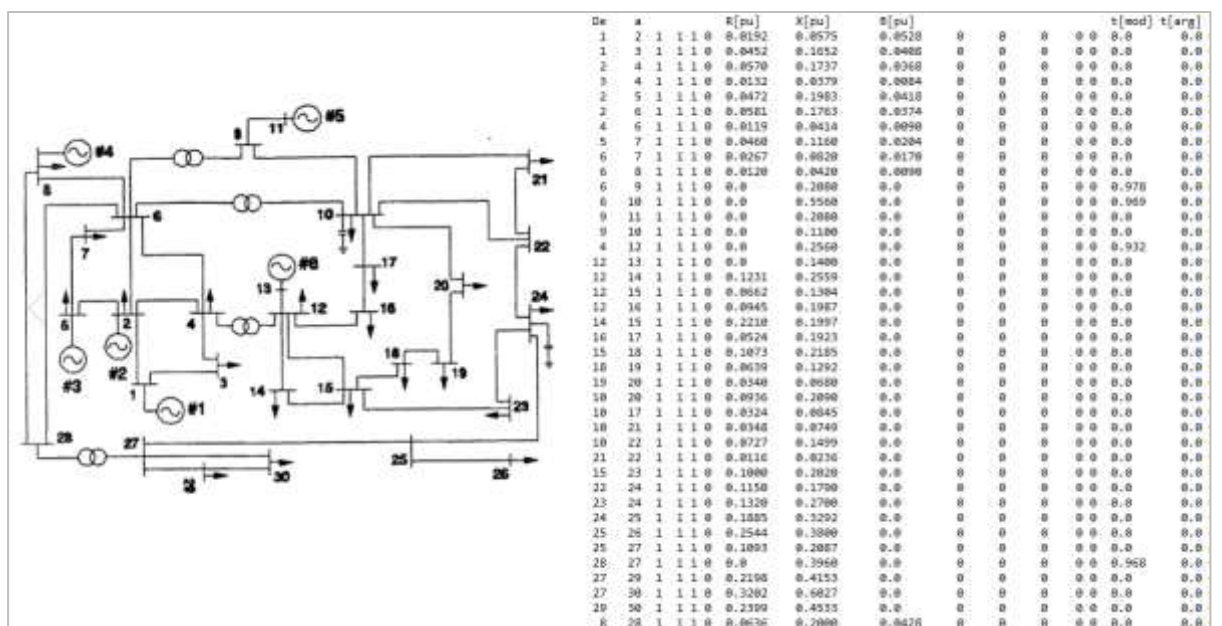


Figura 45. Nudos eléctricos del sistema de 30 nudos

Tras aplicar el flujo de cargas continuado, se obtiene un punto máximo de carga de 195 MW ($\lambda=1.95$), bastante inferior al caso anterior. Desde la figura 46 hasta la figura 69 se muestran los perfiles de tensión de los nudos más significativos. Se concluye que el nudo crítico es el nudo 30 con una tensión de 0.507 pu. Los siguientes nudos más comprometidos en cuanto a estabilidad de tensión son los nudos 29 y 26 con unas tensiones de 0.583 pu y 0.598 pu respectivamente en el punto máximo de carga.

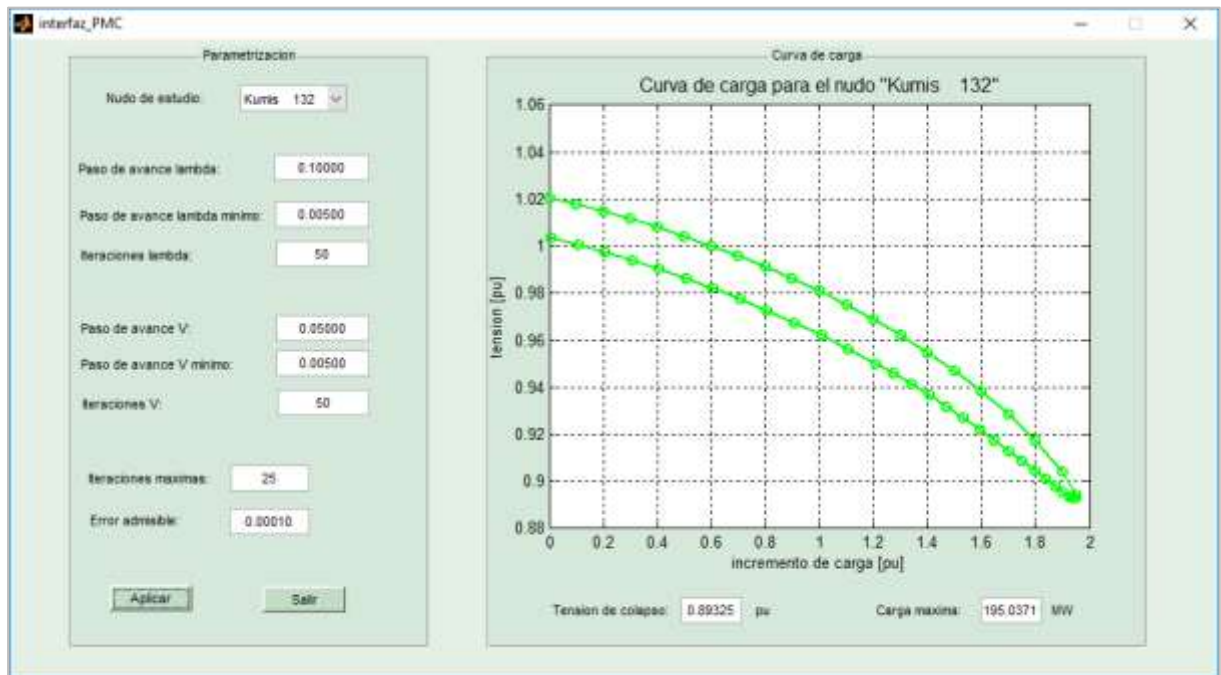


Figura 46. Flujo de carga continuado para el nudo 3 del sistema de 30 nudos

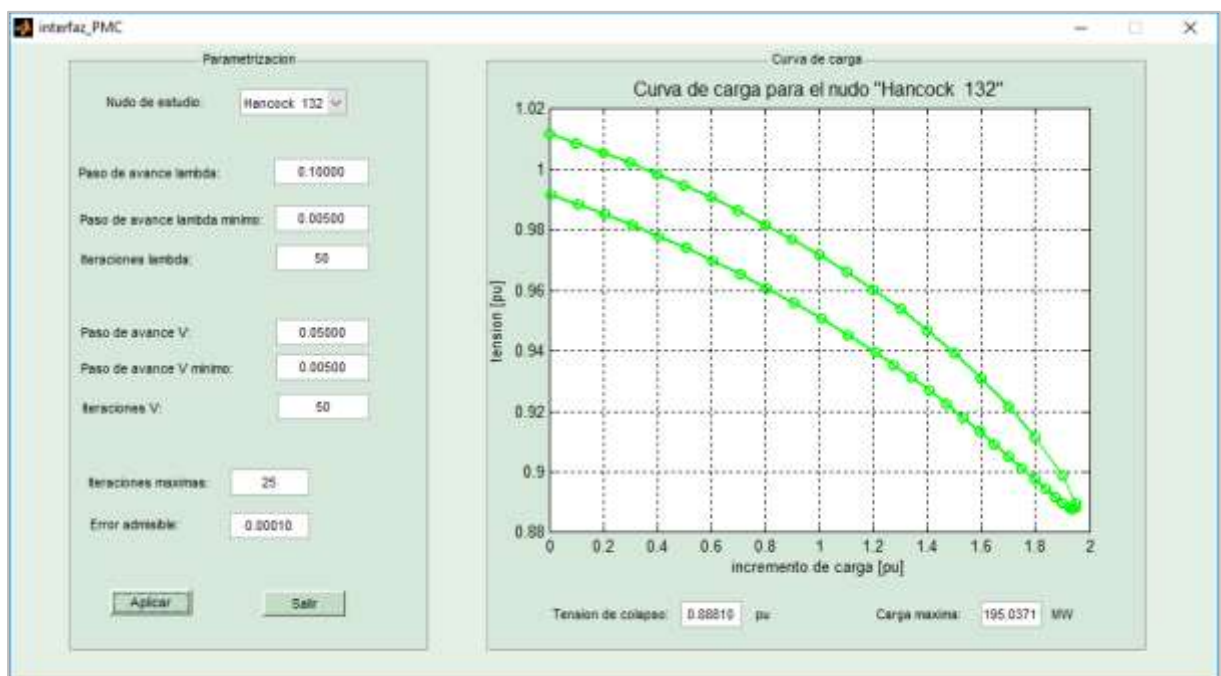


Figura 47. Flujo de carga continuado para el nudo 4 del sistema de 30 nudos

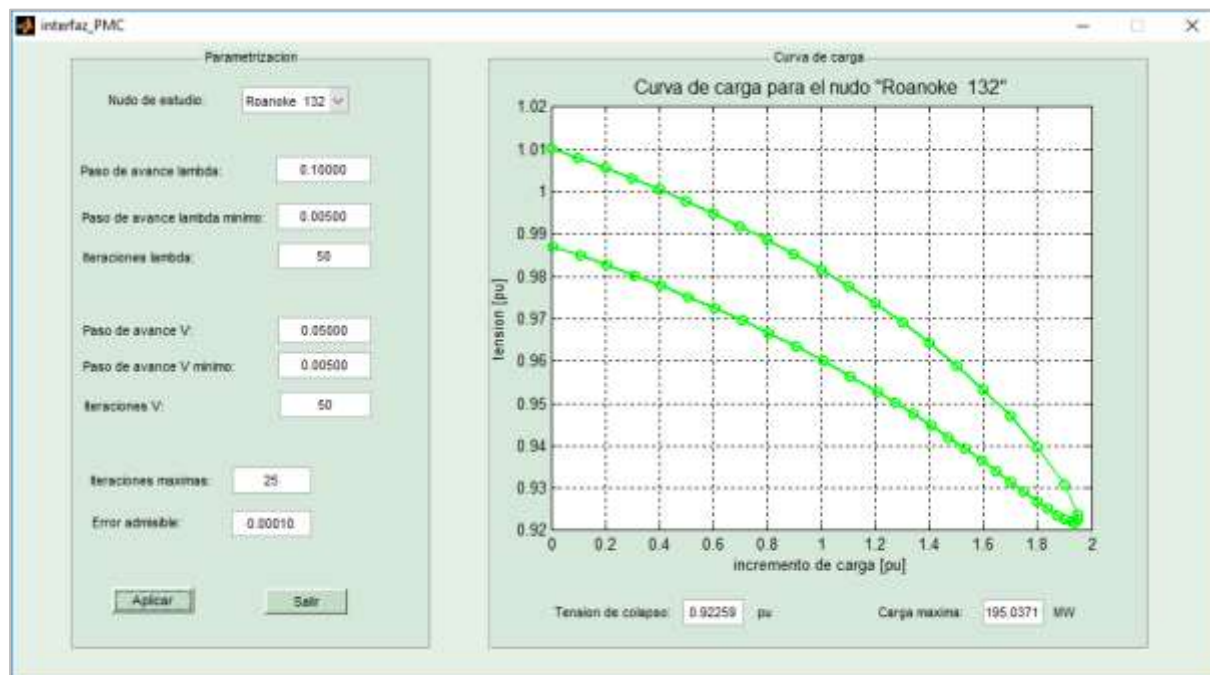


Figura 48. Flujo de carga continuado para el nudo 6 del sistema de 30 nudos

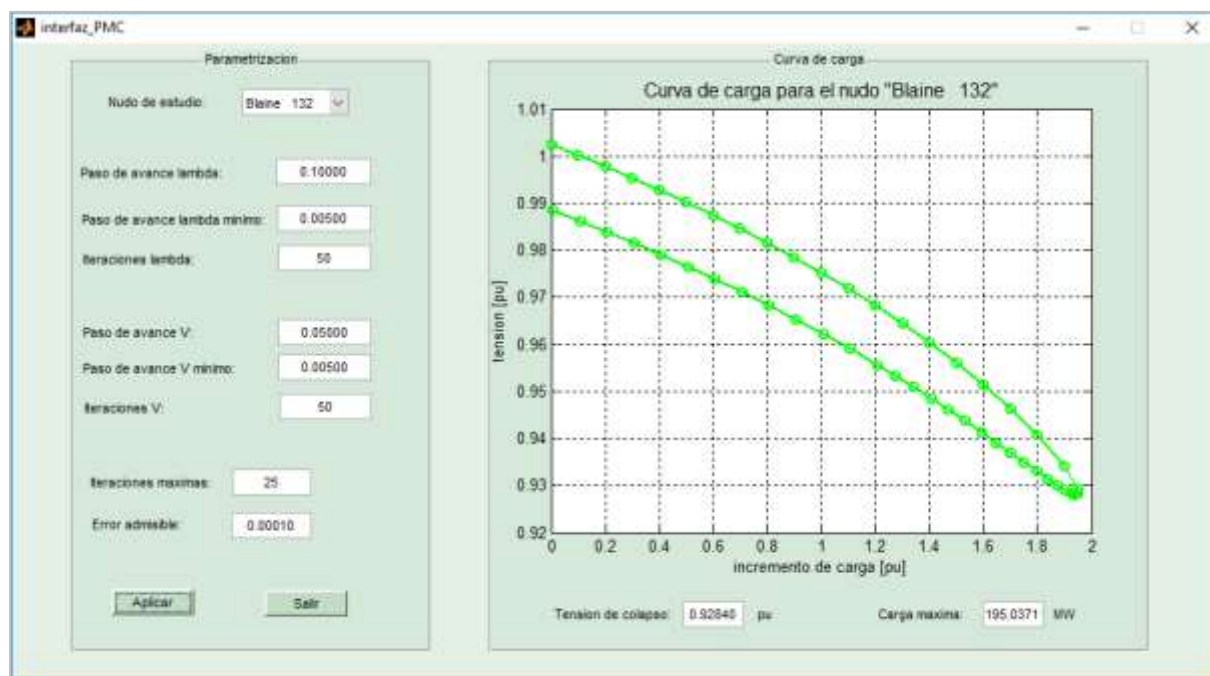


Figura 49. Flujo de carga continuado para el nudo 7 del sistema de 30 nudos

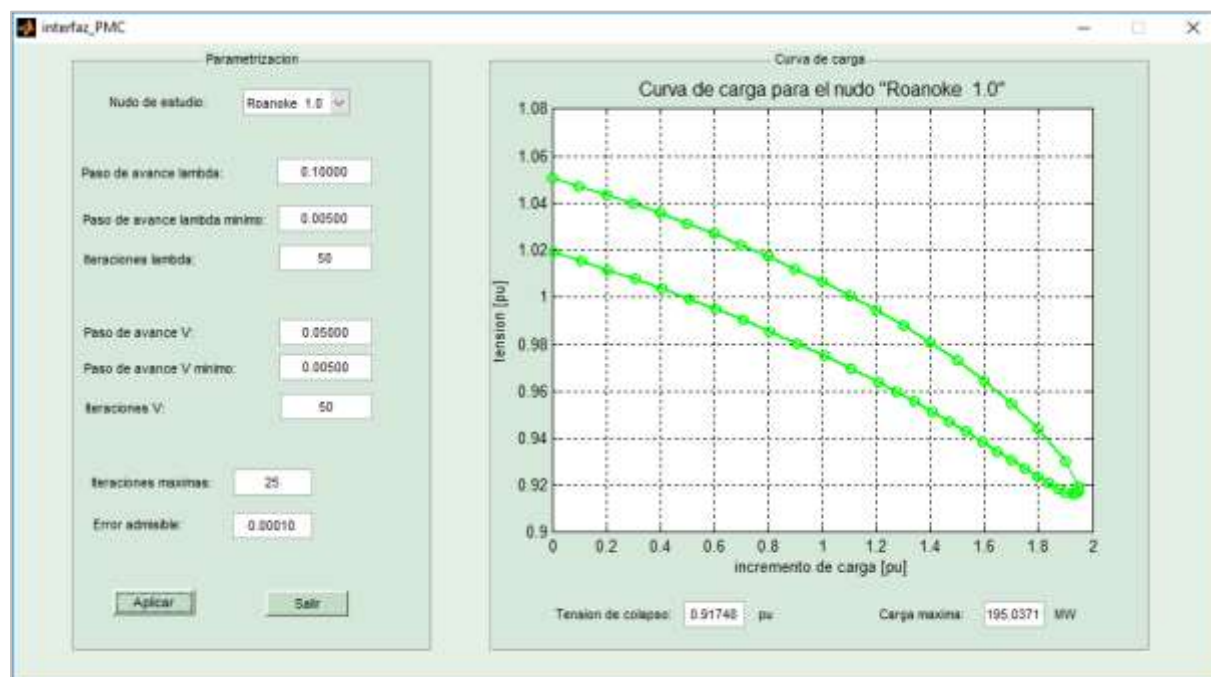


Figura 50. Flujo de carga continuado para el nudo 9 del sistema de 30 nudos

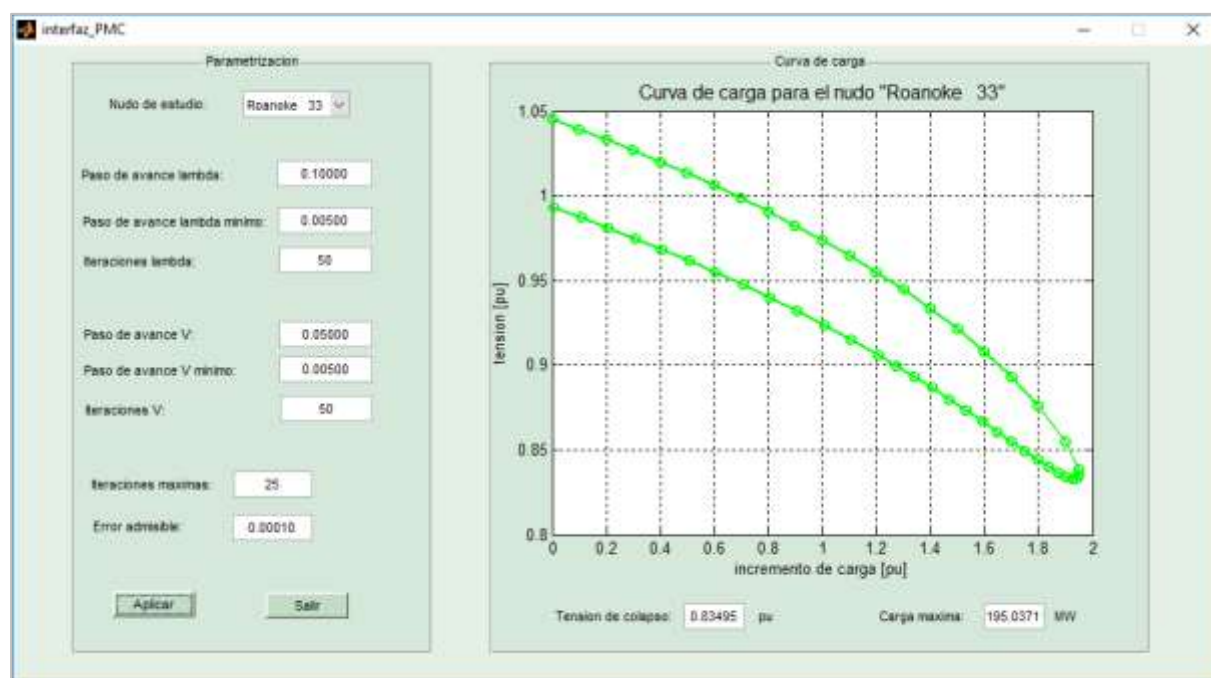


Figura 51. Flujo de carga continuado para el nudo 10 del sistema de 30 nudos

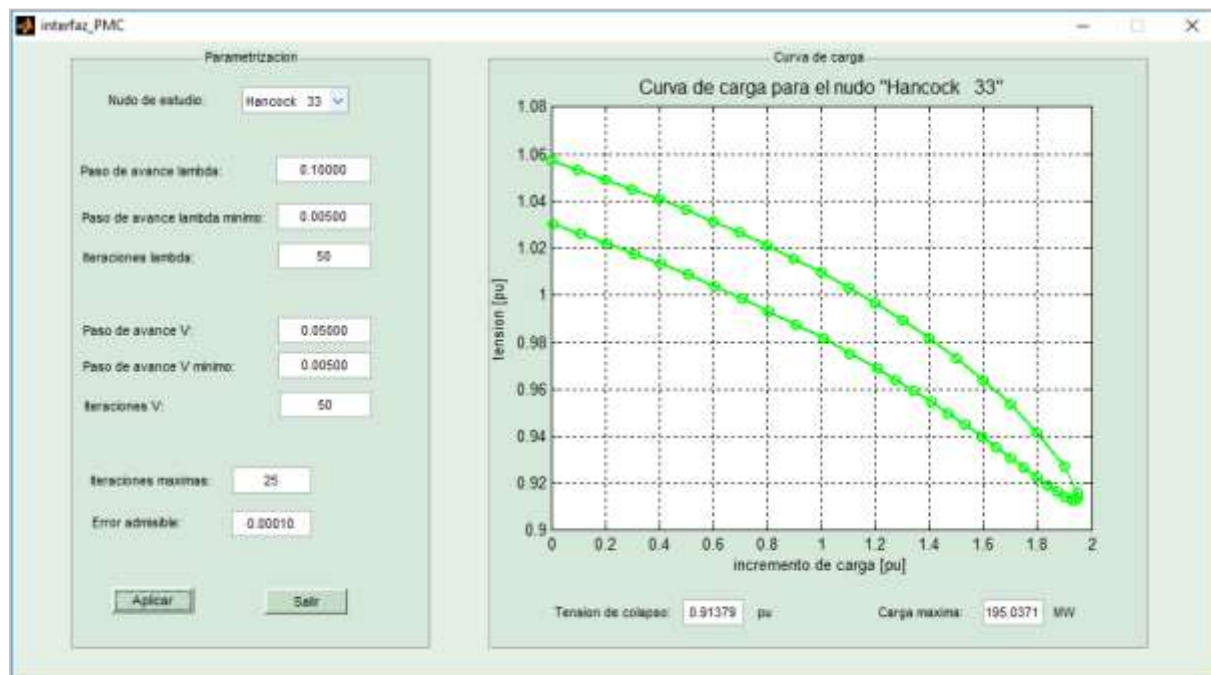


Figura 52. Flujo de carga continuado para el nudo 12 del sistema de 30 nudos

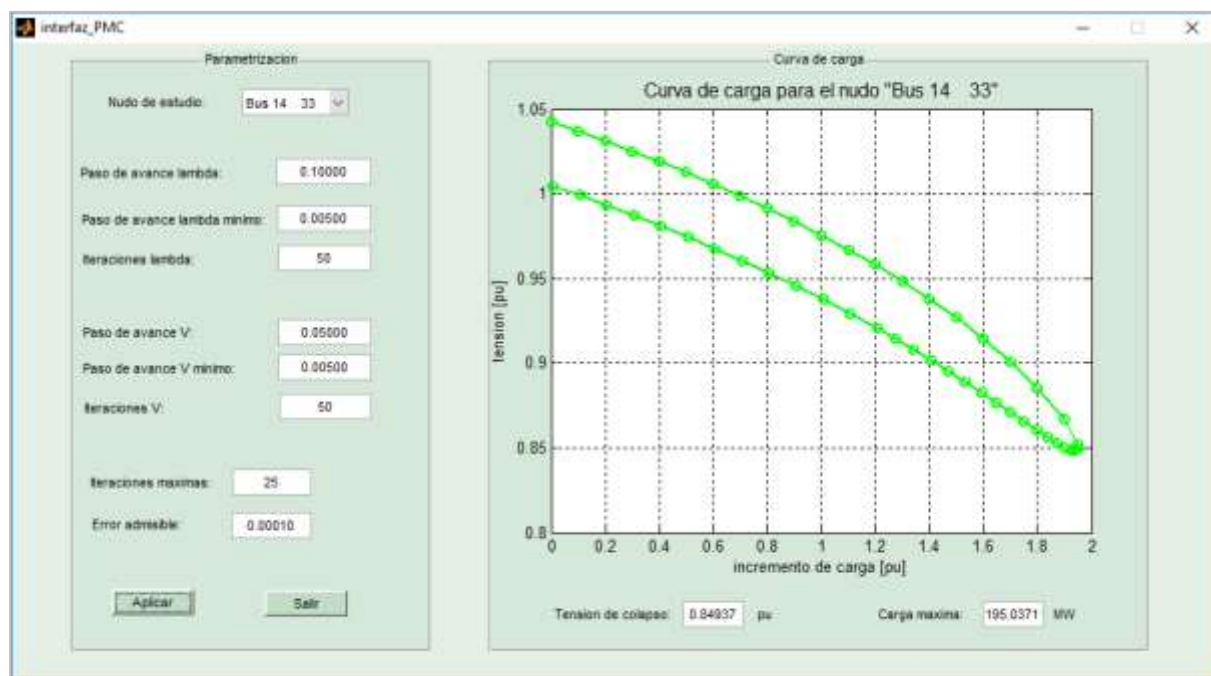


Figura 53. Flujo de carga continuado para el nudo 14 del sistema de 30 nudos

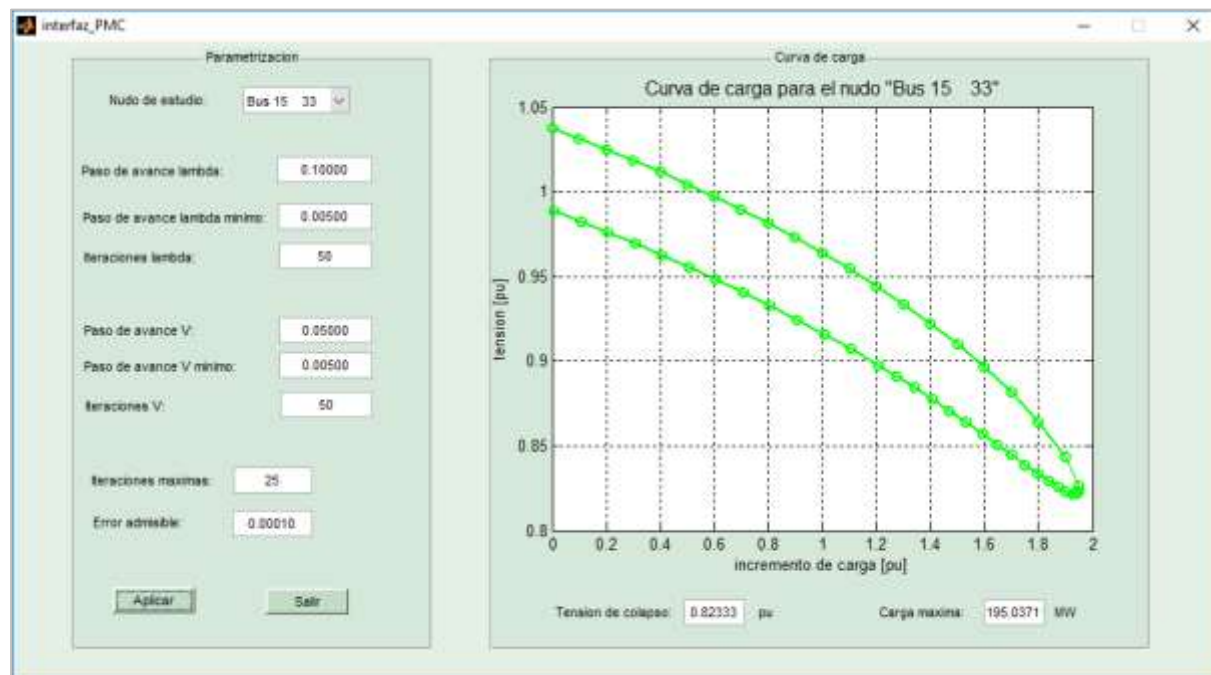


Figura 54. Flujo de carga continuado para el nudo 15 del sistema de 30 nudos

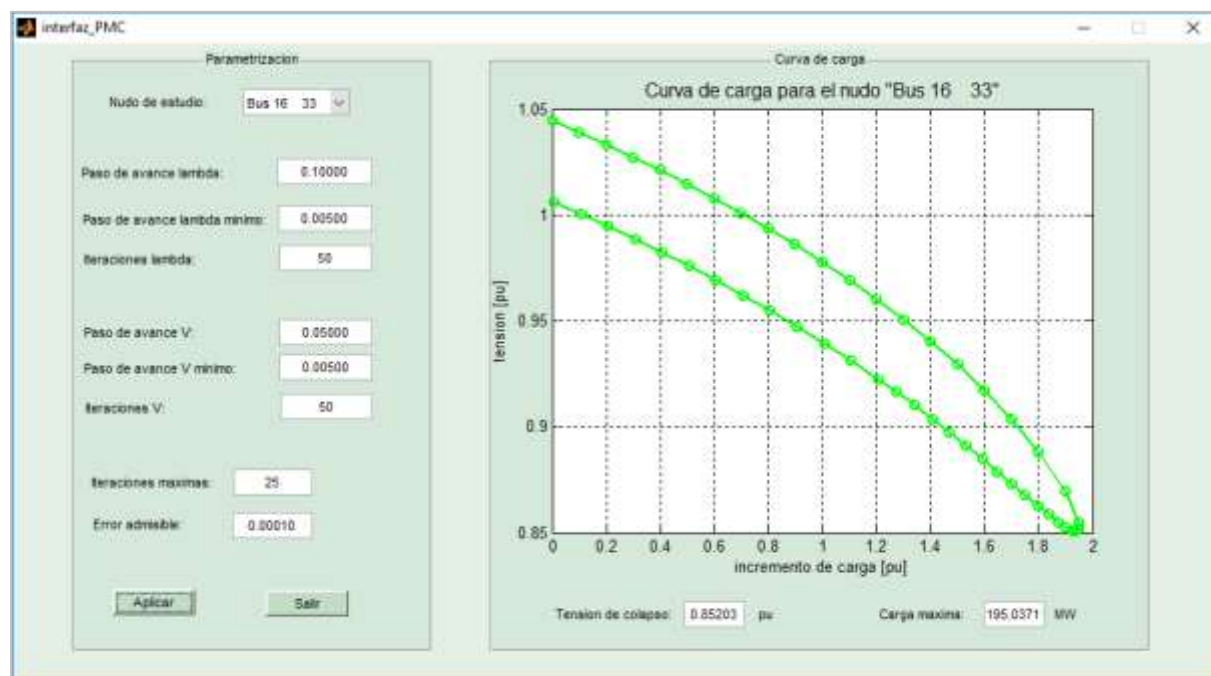


Figura 55. Flujo de carga continuado para el nudo 16 del sistema de 30 nudos

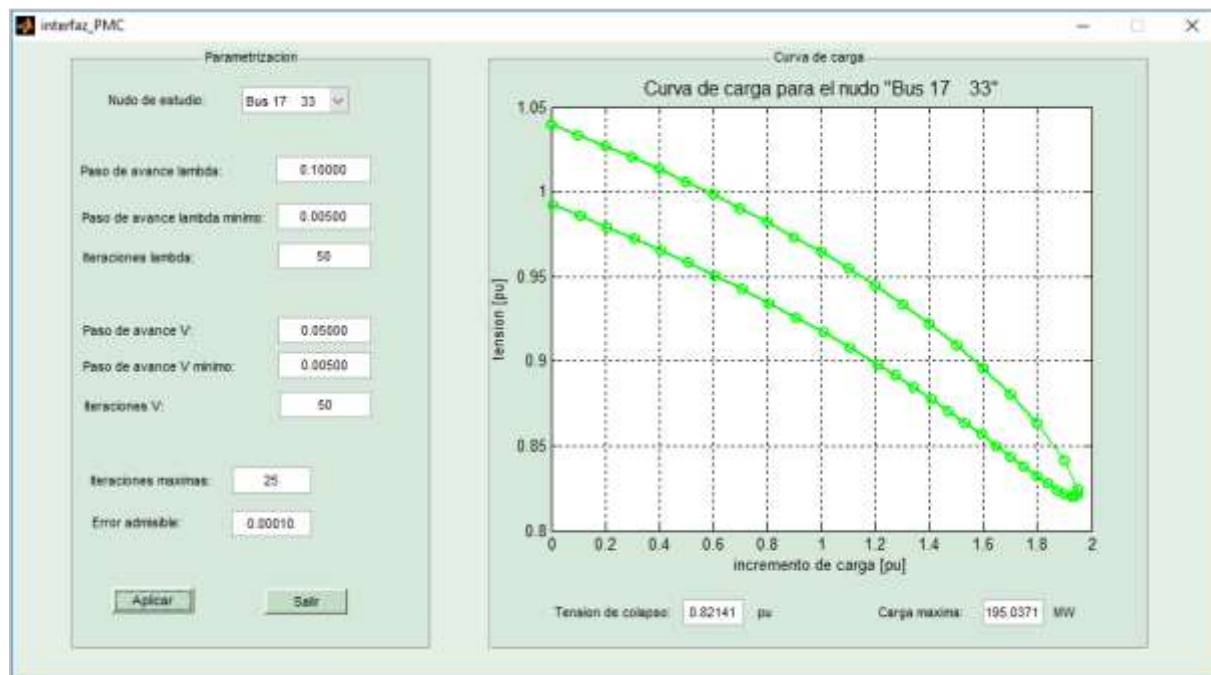


Figura 56. Flujo de carga continuado para el nudo 17 del sistema de 30 nudos

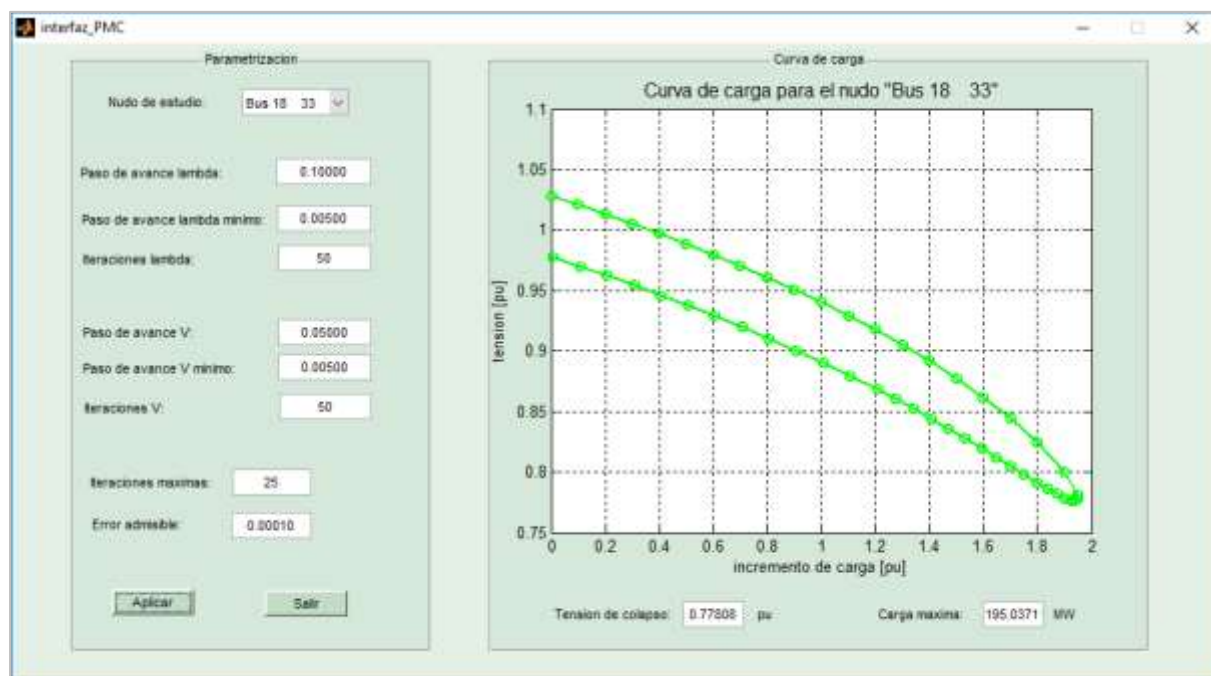


Figura 57. Flujo de carga continuado para el nudo 18 del sistema de 30 nudos

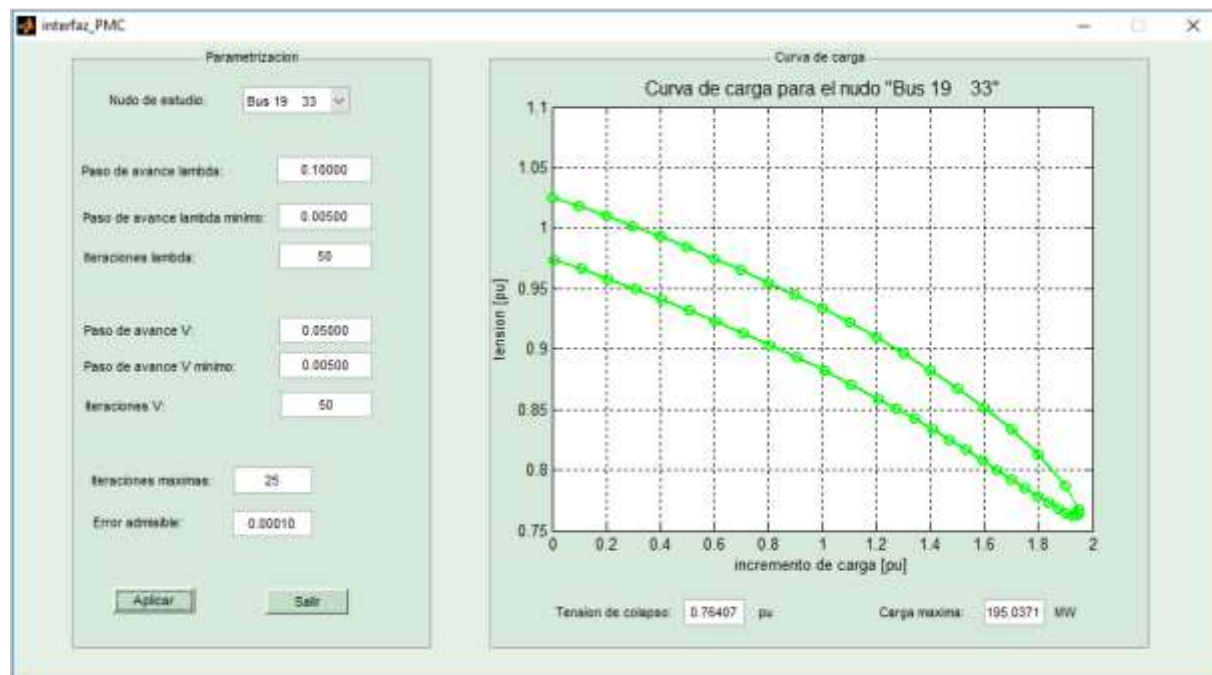


Figura 58. Flujo de carga continuado para el nudo 19 del sistema de 30 nudos

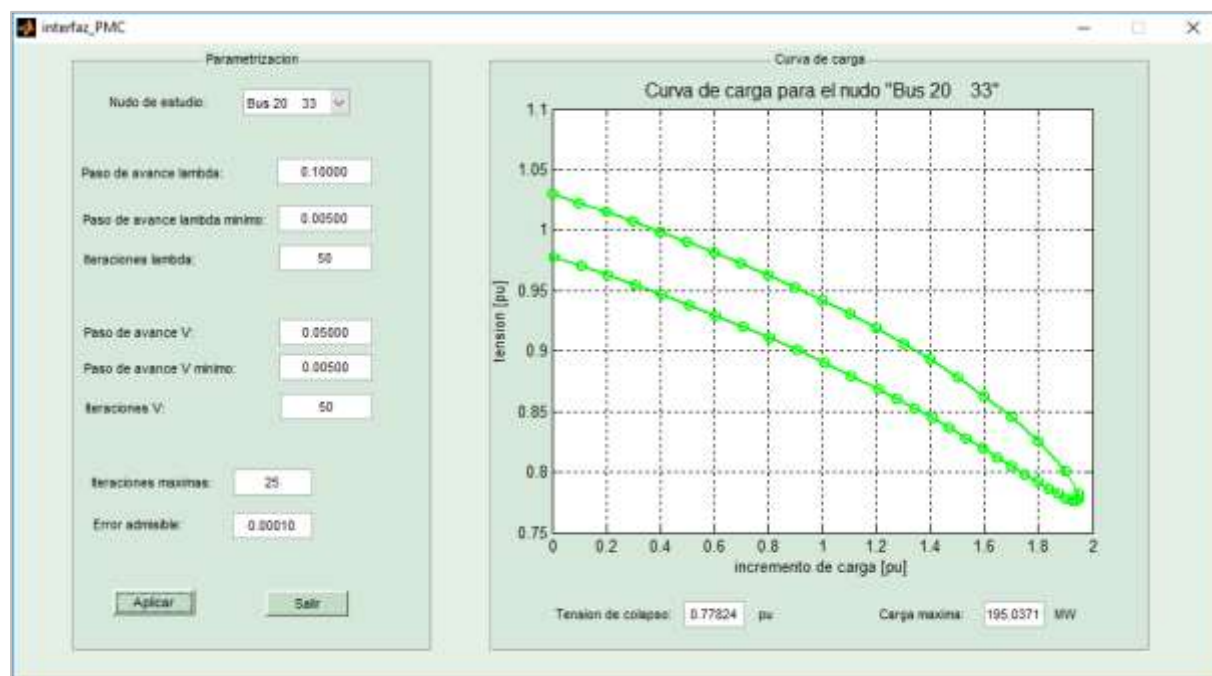


Figura 59. Flujo de carga continuado para el nudo 20 del sistema de 30 nudos

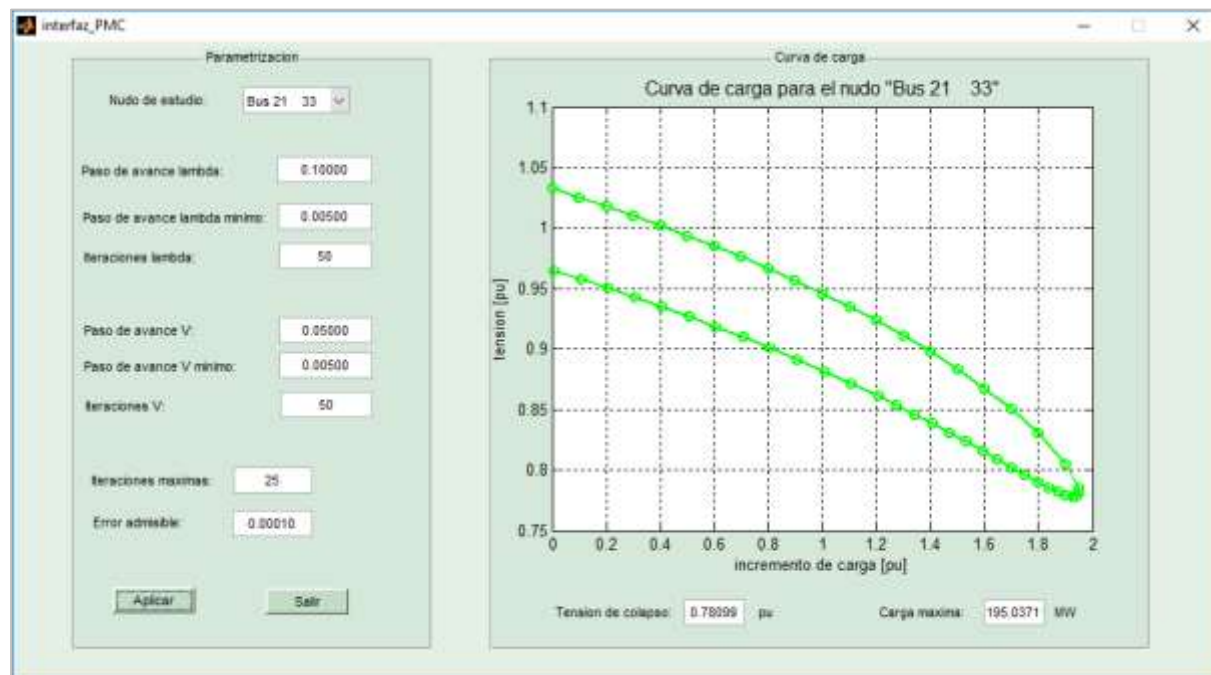


Figura 60. Flujo de carga continuado para el nudo 21 del sistema de 30 nudos

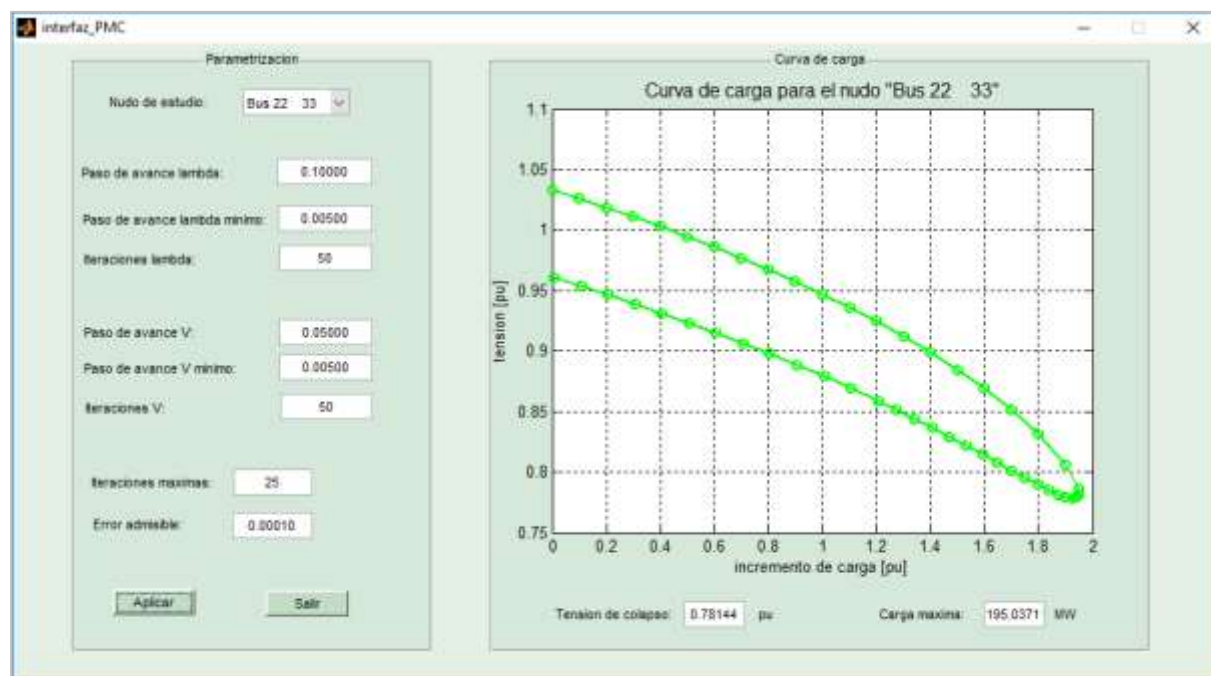


Figura 61. Flujo de carga continuado para el nudo 22 del sistema de 30 nudos

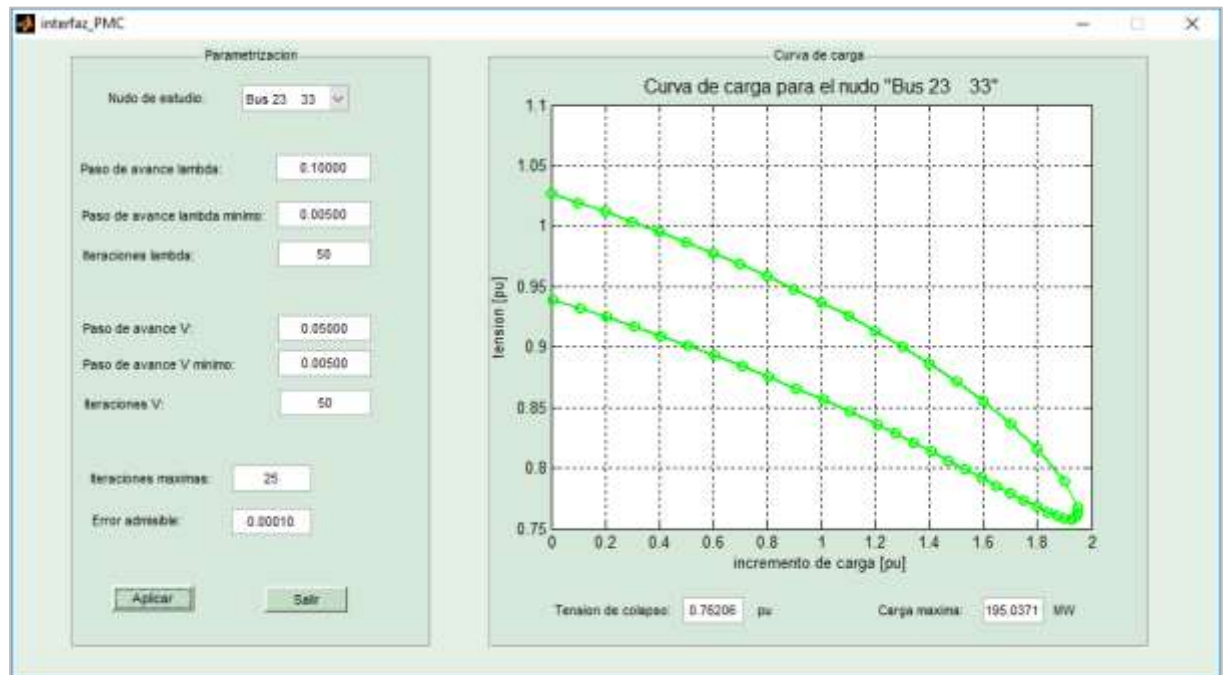


Figura 62. Flujo de carga continuado para el nudo 23 del sistema de 30 nudos

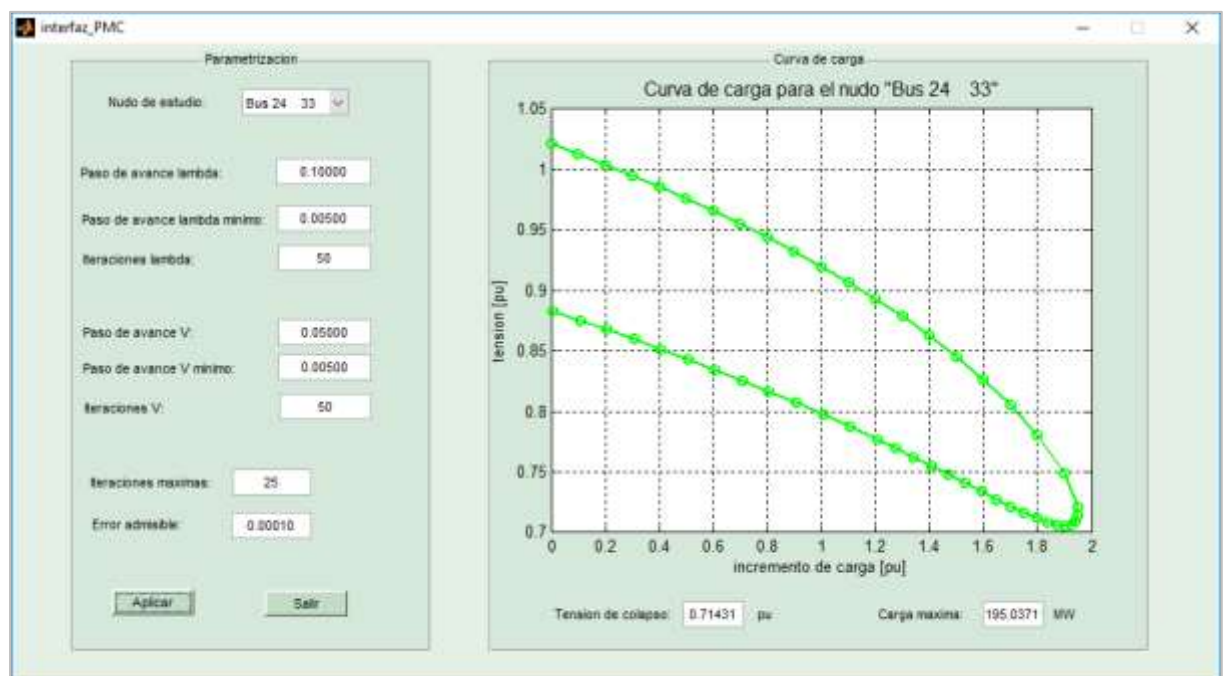


Figura 63. Flujo de carga continuado para el nudo 24 del sistema de 30 nudos

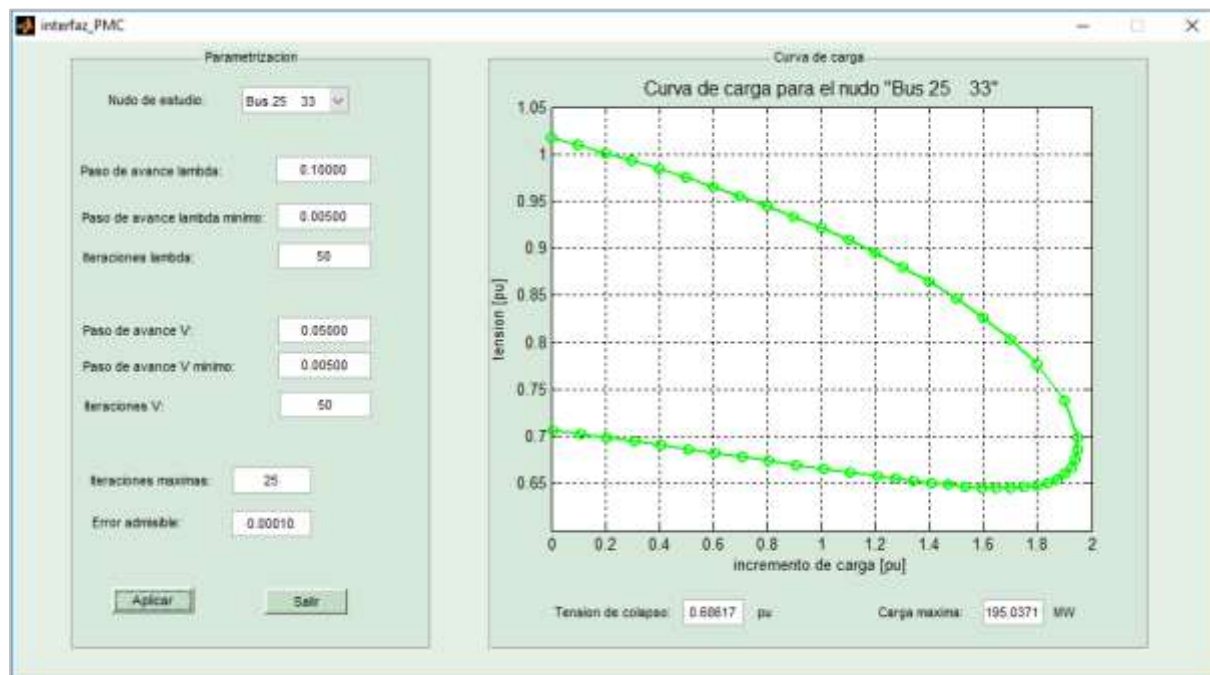


Figura 64. Flujo de carga continuado para el nudo 25 del sistema de 30 nudos

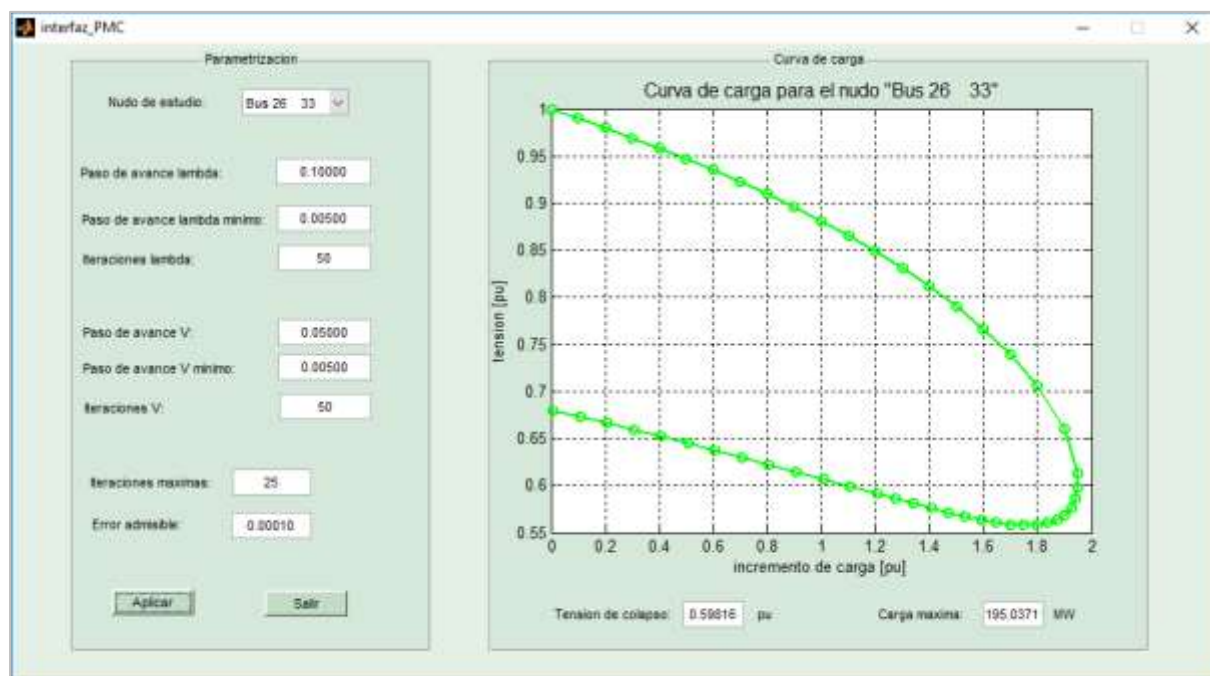


Figura 65. Flujo de carga continuado para el nudo 26 del sistema de 30 nudos

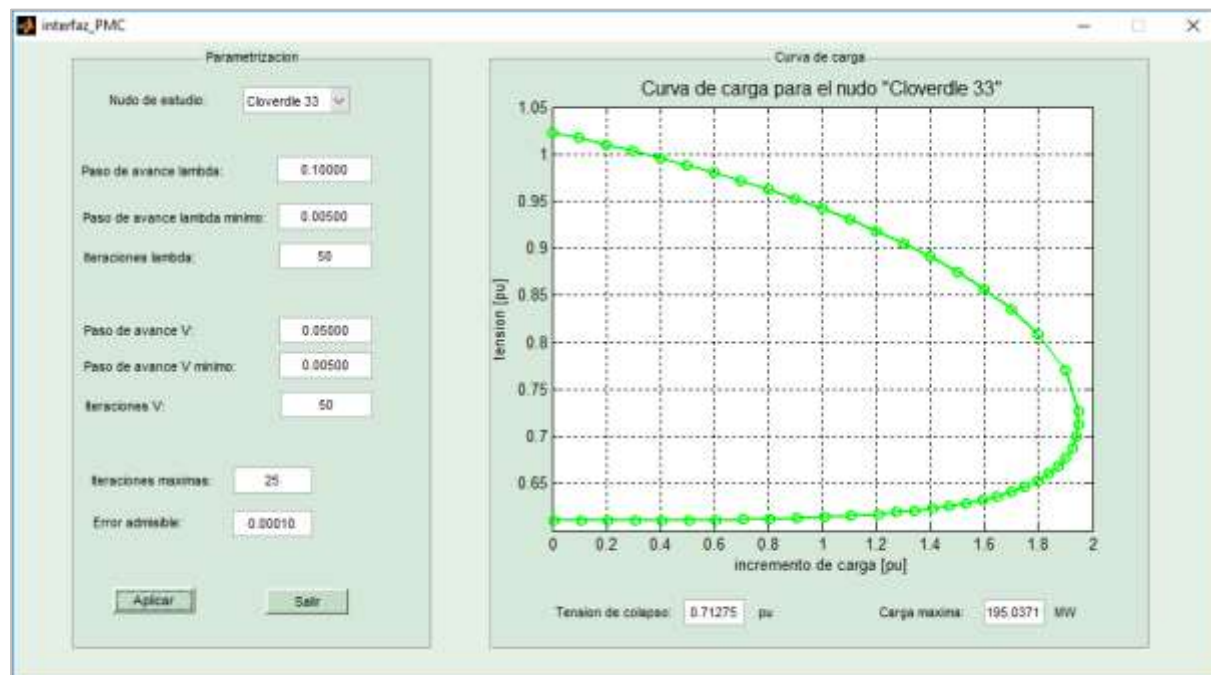


Figura 66. Flujo de carga continuado para el nudo 27 del sistema de 30 nudos

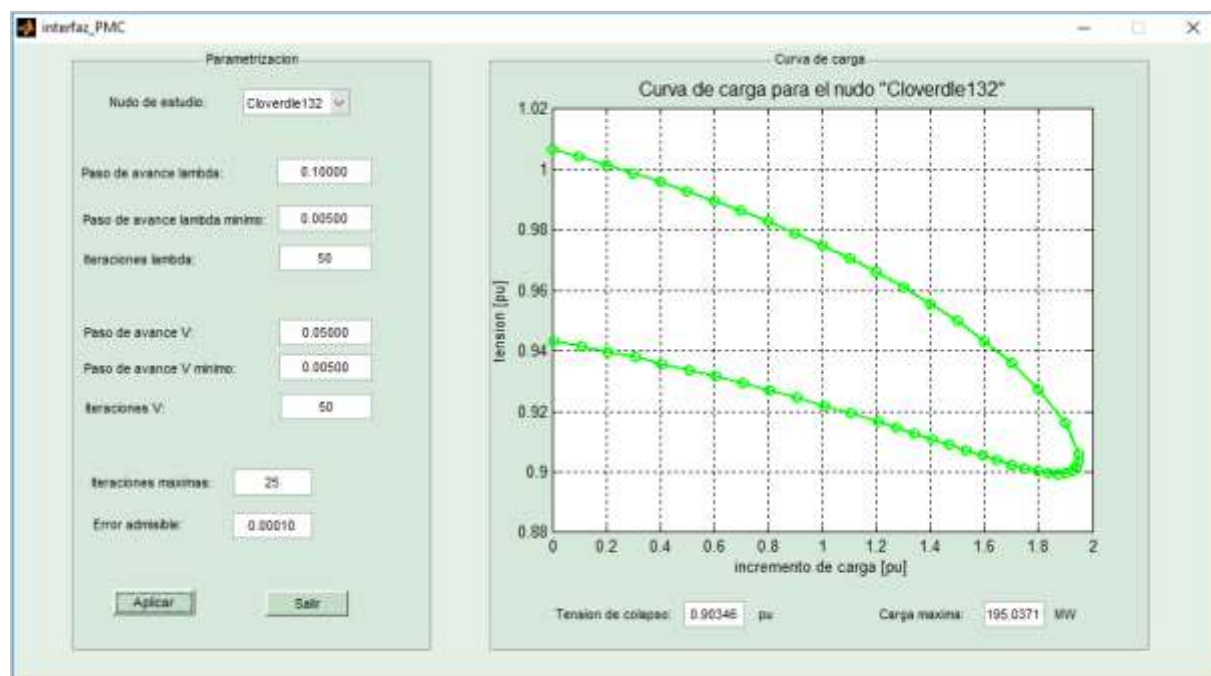


Figura 67. Flujo de carga continuado para el nudo 28 del sistema de 30 nudos

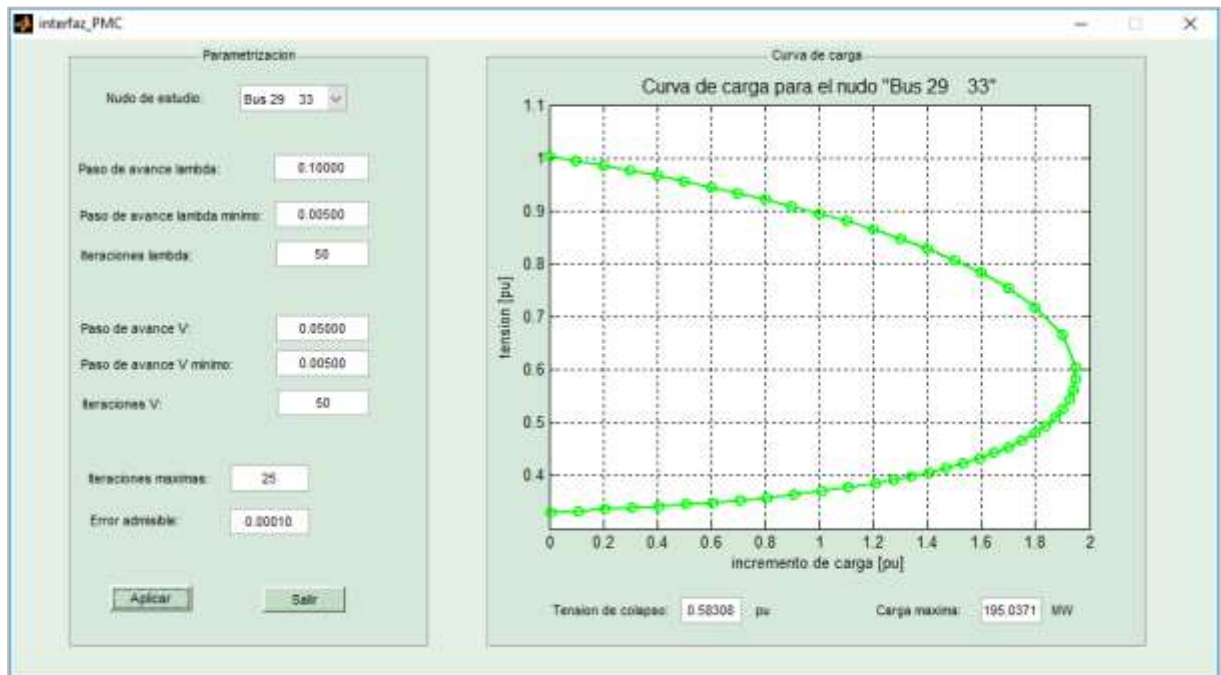


Figura 68. Flujo de carga continuado para el nudo 29 del sistema de 30 nudos

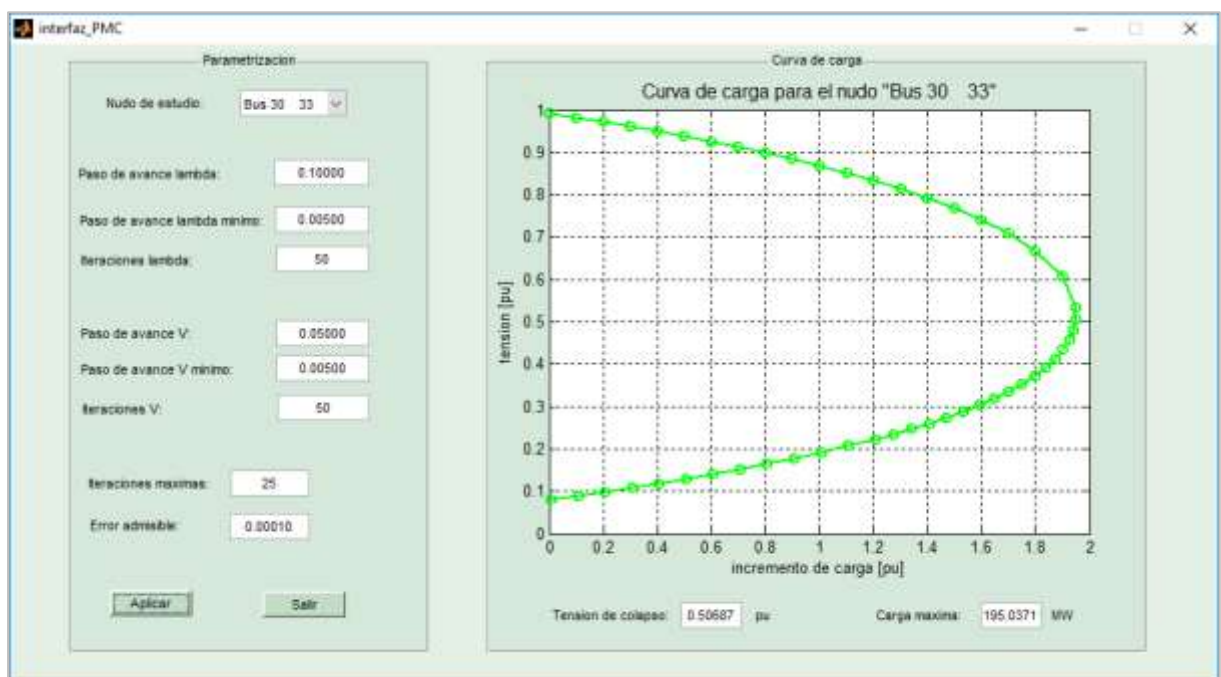


Figura 69. Flujo de carga continuado para el nudo 30 del sistema de 30 nudos

7 CONCLUSIONES

El presente trabajo ha permitido profundizar en los aspectos teóricos más relevantes sobre el análisis de flujo de cargas de Sistemas de Energía Eléctrica (Ajarapu, 2007; Chow et al, 2004; Gómez-Expósito et al., 2016; Grigsby, 2007; Milano, 2010). Especial mención merece el proceso de predicción-corrección, que ha servido de referencia para desarrollar el modelo numérico para simular el comportamiento de sistemas eléctricos ante diferentes condiciones de carga. Dicho modelo se ha caracterizado por su exhaustividad (desarrollos matemáticos detallados, descripción de parámetros de convergencia, incorporación de ejemplos numéricos, etc.) y por su versatilidad; es decir, el modelo es compatible con el formato de datos con el que se suelen definir los Sistemas de Energía Eléctrica (especificación de los nudos y líneas que componen la red, sus características más importantes y sus condiciones de operación).

Para validar dicho modelo se ha desarrollado un programa transaccional implementado en Matlab. Dicho programa ha permitido la integración de ficheros de texto con información de diversos sistemas eléctricos (en el presente trabajo se han incluido sistemas de 5, 14 y 30 nudos). Una vez que se han integrado correctamente los ficheros, se ha pasado a analizarlos; definiendo una interfaz gráfica para especificar los parámetros de convergencia (iteraciones máximas, error admisible, paso de avance, etc.). Se ha observado que la elección de unos u otros valores influye significativamente en los resultados obtenidos (por ejemplo, para un sistema de 14 nudos, para incrementos sucesivos de carga de 0.001 pu, se ha tardado varios minutos en trazar la curva de carga, mientras que para incrementos de carga de 0.1 pu se ha tardado menos de un minuto). Por lo tanto, queda a decisión del usuario el escoger bajos tiempos de cálculo a costa de una baja exactitud, o altos tiempos de ejecución para obtener resultados más exactos.

A parte de la parametrización y el trazado de curvas de carga, el programa ha permitido guardar los resultados obtenidos. Con ello, se ha podido comparar resultados y detectar zonas débiles o críticas del sistema, además de determinar magnitudes de interés como el punto máximo de carga o la tensión de colapso. Estos valores podrían tomarse como referencia para estudios más detallados, o para validar o rechazar un determinado sistema eléctrico bajo unas condiciones particulares de operación.

Finalmente, mencionar el carácter académico del presente trabajo. En el mercado existen programas informáticos con una interfaz gráfica más “amigable” (en vez de integrar ficheros permiten dibujar redes eléctricas); implementados en equipos con mayor potencia de cálculo y mejor aprovechamiento de la memoria. Sin embargo, los algoritmos empleados por los mismos muchas veces no son accesibles al usuario. Por lo tanto, una gran ventaja que ha ofrecido el presente trabajo es la posibilidad de acceder a la descripción de diferentes algoritmos de cálculo y control, para su consulta y posible modificación.

8 REFERENCIAS

- Ajjarapu, Venkataramana (2007). Computational Techniques for Voltage Stability Assessment and Control. Iowa State University. Iowa: Springer, pp. 49 - 117
- Chow, Joe H.; Wu, Felix F.; Momoh, James A. (2004). Applied Mathematics for Restructured Electric Power Systems: Optimization, Control, and Computational Intelligence. Library of Congress. New York: Springer, pp. 39 - 50
- Crow, Mariesa L. (2010). Computational Methods for Electric Power Systems. New York: CRC Press Taylor and Francis Group, pp. 72 - 96
- Gomez-Expósito, Antonio; Conejo, Antonio J.; Cañizares, Claudio (2016). Electric Energy Systems: Analysis and Operation. New York : CRC Press Taylor and Francis Group, pp. 461 - 509
- Grigsby, Leonard L. (2007). Power Systems. New York : CRC Press Taylor and Francis Group, pp. 72 - 96
- Milano, Federico (2010). Power System Modelling and Scripting. Springer Science & Business Media. Berlin: Springer, pp. 102 - 219